МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.Н. СЕМЕНЧУК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Гомель 2007

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.Н. СЕМЕНЧУК

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ

для студентов 1 курса

специальности 1–31 03 03 – «Прикладная математика»

Гомель 2007

УДК 519.14(075.8)
ББК 22.174 я73
С 305

Рецензенты:
А.Н.Скиба**,** профессор, доктор физико-математических наук;
кафедра высшей математики учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом учреждения образования «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»

С 305 **Семенчук, В.Н.**
Дискретная математика [Текст]: практ. пособ. для студентов специальности 1-31 03 03 «Прикладная математика» / В.Н. Семенчук; М-во образов. РБ, Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины.– Гомель: УО «ГГУ им. Ф. Скорины», 2007.– с.

ISBN

Практическое пособие ставит своей целью оказание помощи студентам в усвоении основных методов дискретной математики и их применения при решении практических задач. Данное пособие может быть использовано для самостоятельной работы студентов и предназначено для студентов математического факультета специальности «Прикладная математика».

УДК 519.14(075.8)
ББК 22.174 я73

ISBN

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Настоящее учебное пособие посвящено изучению таких важных разделов дискретной математики, как теория булевых функций, теория графов, теория кодирования, теория алгоритмов, теория конечных автоматов. В него включены девять лабораторных работ: булевы функции, нормальные формы булевых функций, минимизация булевых функций, контактные и логические схемы, полнота и замкнутость, алгебра логики предикатов, конечные автоматы, рекурсивные функции и машина Тьюринга.

Данное пособие может рассматриваться студентами как «специальный курс на дому». Перед каждой лабораторной работой приводится необходимый теоретический материал, затем следует решение и разбор типовых задач, приводятся вопросы для самостоятельного контроля и список рекомендованной литературы.

<u>Тема 1</u>
БУЛЕВЫ ФУНКЦИИ

1.1 Высказывания.

1.2 Операции над высказываниями.

1.3 Понятие булевой функции, элементарные булевы функции.

Основные понятия по теме

Функцией алгебры логики (булевой функцией) $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется функция, принимающая значения 1,0 и аргументы которой также принимают значения 1,0.

Всякая булева функция от n переменных может быть задана с помощью таблицы истинности

x_1	x_2	…	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	…	0	0	$f(0,0,\ldots,0,0)$
0	0	…	0	1	$f(0,0,\ldots,0,1)$
0	0	…	1	0	$f(0,0,\ldots,1,0)$
…	…	…	…	…	…
1	1	…	1	1	$f(1,1,\ldots,1,1)$

Данная таблица состоит из 2^n строк, причем в ней все наборы ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) расположены в порядке возрастания их номеров. Следующие булевы функции мы будем называть элементарными.

$f_1(x) = 0$ - константа 0;

$f_2(x) = 1$ - константа 1;

$f_3(x) = x$ - тождественная функция;

$f_4(x) = \overline{x}$ - отрицание x;

$f_5(x, y) = xy$ - конъюнкция x и y;

$f_6(x,y) = x \vee y$ - дизъюнкция x и y;

$f_7(x,y) = x \Rightarrow y$ - импликация x и y;

$f_8(x,y) = x \Leftrightarrow y$ - эквивалентность x и y;

$f_9(x,y) = x + y$ - сложение x и y по mod 2;

$f_{10}(x,y) = x \mid y$ - функция Шеффера;

$f_{11}(x,y) = x \downarrow y$ - функция Пирса.

Данные функции задаются следующими таблицами истинности

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0

Приведем определение формулы алгебры логики:

1. каждая элементарная булева функция – формула;
2. если некоторое выражение η есть формула, то $\overline{\eta}$ тоже формула;
3. если некоторые выражения μ и η есть формулы, то выражения $\eta \vee \mu$, $\eta\,\mu$, $\eta \Rightarrow \mu$, $\eta \Leftrightarrow \mu$, $\eta + \mu$, $\eta \mid \mu$, $\eta \downarrow \mu$ тоже формулы;
4. других формул: кроме построенных в п. 1–3 нет.

С целью упрощения записи формул, договоримся, что операция конъюнкция «сильнее» других логических операций, т.е. если в формуле нет скобок, то вначале выполняется операция конъюнкция.

Две формулы η и μ называются *равносильными*, если они определяют одну и ту же булеву функцию (запись $\eta = \mu$ будет означать, что формулы η и μ равносильны).

Приведем перечень важнейших равносильностей (законов) алгебры логики.

1. $x = x$ – закон тождества;

2. $x\overline{x} = 0$ – закон противоречия;

3. $x \vee \overline{x} = 1$ – закон исключения третьего;

4. $\overline{\overline{x}} = x$ – закон двойного отрицания;

5. $xx = x$, $x \vee x = x$ – законы идемпотентности;

6. $xy = yx$, $x \vee y = y \vee x$ – законы коммутативности;

7. $x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z)$, $x(y \vee z) = xy \vee xz$ – законы дистрибутивности;

8. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x(yz) = (xy)z$ – законы ассоциативности;

9. $\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}$, $\overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$ – законы де Моргана;

10. $x \cdot 1 = x$, $x \vee 0 = x$, $x \cdot 0 = 0$, $x \vee 1 = 1$.

11. $x(x \vee y) = x$, $x \vee xy = x$ –законы поглощения;

12. $(x \vee y)(\overline{x} \vee y) = y$, $xy \vee \overline{x}y = y$ –законы склеивания.

Отметим следующие важнейшие равносильности

1. $x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$

2. $x \Leftrightarrow y = xy \vee \overline{x}\overline{y}$

3. $x + y = x\overline{y} \vee \overline{x}y$

4. $x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y}$

5. $x \downarrow y = \overline{x} \cdot \overline{y}$

6. $xy = \overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$

7. $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$

Формула алгебры логики называется *тавтологией* (тождественно истинной), если при любых значениях переменных она принимает истинное значение.

Формула алгебры логики называется *противоречием* (тождественно ложной), если при любых значениях переменных она принимает ложное значение.

Формула алгебры логики называется *выполнимой*, если найдется такой набор значений переменных, при котором ее значение истинно.

Пример 1 Является ли формула $\eta = (x \Rightarrow (y \Leftrightarrow z)) \Leftrightarrow ((x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z))$ тавтологией?

1 способ (табличный)

x	y	z	$y \Leftrightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Leftrightarrow z)$	$x \Rightarrow y$	$x \Rightarrow z$	$(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)$	η
0	0	0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

2 способ (аналитический)

$$(x \Rightarrow (y \Leftrightarrow z)) \Leftrightarrow ((x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)) \overset{14}{=}$$

$$= (\bar{x} \vee (y \Leftrightarrow z)) \Leftrightarrow ((\bar{x} \vee y) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee z)) \overset{15}{=}$$

$$= (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}) \Leftrightarrow \left((\bar{x} \vee y)(\bar{x} \vee z) \vee \overline{\bar{x} \vee y} \cdot \overline{\bar{x} \vee z}\right) \overset{7,9}{=}$$

$$= (\bar{x} \vee yz \vee \bar{y}\bar{z}) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee yz \vee x\bar{y} \cdot x\bar{z}) \overset{7}{=} (\bar{x} \vee yz \vee \overline{yz}) \Leftrightarrow (\bar{x} \vee yz \vee \overline{yz}) = 1.$$

Пример 2 Является ли формула $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$ тавтологией?

Метод от противного.

Пусть $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)) = 0$.

Тогда $\begin{cases} x \Rightarrow y = 1 \\ (y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z) = 0 \end{cases}$. Отсюда $\begin{cases} x \Rightarrow y = 1 \\ y \Rightarrow z = 1 \\ x \Rightarrow z = 0 \end{cases}$

Из последнего следует, что $x=1$. Тогда $1\Rightarrow y=1$, $y\Rightarrow 0=1$, что невозможно.

Пример 3 Равносильны ли формулы?

$(x\Rightarrow(y\vee z))(\bar y\Rightarrow u)(ux\Rightarrow\bar z)\Rightarrow y$; $x\vee y\vee\bar u$

$$(x\Rightarrow(y\vee z))(\bar y\Rightarrow u)(ux\Rightarrow\bar z)\Rightarrow y\overset{14}{=}$$

$$=\overline{(\bar x\vee y\vee z)(\bar{\bar y}\vee u)(\overline{ux}\vee\bar z)}\vee y\overset{4,9}{=}$$

$$=x\bar y\bar z\vee\bar y\bar u\vee uxz\vee y\overset{7}{=}x\bar y\bar z\vee xuz\vee(\bar y\vee y)(y\vee\bar u)\overset{3}{=}$$

$$=x\bar y\bar z\vee xuz\vee y\vee\bar u\overset{7}{=}(\bar y\vee y)(x\bar z\vee y)\vee(u\vee\bar u)(xz\vee\bar u)\overset{3}{=}$$

$$=x\bar z\vee y\vee xz\vee\bar u\overset{7}{=}x(\bar z\vee z)\vee y\vee\bar u\overset{3}{=}$$

$$=(\bar y\vee y)(x\bar z\vee y)\vee(u\vee\bar u)(xz\vee\bar u)\overset{3}{=}$$

$$=x\bar z\vee y\vee xz\vee\bar u\overset{7}{=}x(\bar z\vee z)\vee y\vee\bar u\overset{3}{=}x\vee y\vee\bar u$$

Следовательно, формулы равносильны.

Пример 4 Упростить $(((x\Rightarrow y)\Leftrightarrow(z\Rightarrow x))\,|\,\bar x)\downarrow y$

$$(((x\Rightarrow y)\Leftrightarrow(z\Rightarrow x))\,|\,\bar x)\downarrow y\overset{14,15,17,18}{=}$$

$$=\overline{\overline{(\bar x\vee y)(\bar z\vee x)\vee x\vee\overline{(\bar x\vee y)(\bar z\vee x)}}}\vee\bar{\bar x}\cdot\bar y\overset{4,9}{=}$$

$$((\bar x\vee y)(\bar z\vee x)\vee x\bar y z\bar x)\bar x\bar y\overset{2,7,10}{=}(\bar x\bar z\vee y\bar z\vee xy)\bar x\bar y\overset{7}{=}$$

$$=\bar x\bar y\bar z\vee y\bar z\bar x\bar y\vee xy\bar x y\overset{2,10}{=}\bar x\bar y\bar z$$

Пример 5 Решить уравнение $xy\vee(y\Rightarrow x)\vee(x\Leftrightarrow z)=0$

Это уравнение равносильно следующей системе

$$\begin{cases}xy=0\\ y\Rightarrow x\\ x\Leftrightarrow z=0\end{cases}$$

Из второго уравнения следует, что $y=1$, $x=0$. Ясно, что тогда $xy=0$. Подставляя в третье уравнение $0 \Leftrightarrow z=0$. Следовательно, $z=1$. Итак, $x=0$, $y=1$, $z=1$ - решение искомого уравнения.

Лабораторная работа №1

I. Построить таблицы истинности для формул

1) $(xy+\bar{z}) \Leftrightarrow (\bar{y} \Rightarrow z)$
2) $(x+y+\bar{z}) \Rightarrow (x \downarrow \bar{y})$
3) $(x \vee y \vee \bar{z})(x \downarrow y) \Rightarrow \bar{z}$
4) $(xy\bar{z} \vee \overline{xy}) + (y \Rightarrow \bar{z})$
5) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x + y\bar{z})$
6) $(x \Leftrightarrow \bar{y})(x \Rightarrow z) + \bar{x}$
7) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \Rightarrow (x + y\bar{z})$
8) $(x \mid y) + (y \Rightarrow \overline{zx})$
9) $(xy+z) \Rightarrow (x \mid \bar{y})$
10) $((x \mid y) \downarrow \bar{z}) + (x \vee \bar{y})$

II. Без построения таблиц истинности докажите, что следующие формулы являются тавтологиями

1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$
2) $(\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow (y \Rightarrow x)$
3) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$
4) $(x \Rightarrow z) \Rightarrow ((y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow z))$
5) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow \bar{x})$
6) $(\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow ((\bar{y} \Rightarrow x) \Rightarrow y)$
7) $(y \Rightarrow z) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow (x \vee z))$

8) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow x) \Rightarrow x$

9) $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

10) $(\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \Leftrightarrow (x \Rightarrow y)$

III. Без построения таблиц истинности докажите, что следующие формулы являются противоречием

1) $\overline{x \Rightarrow (y \Rightarrow xy)}$

2) $(x \Leftrightarrow y)\overline{(y \Leftrightarrow x)} \vee (x \Leftrightarrow y)\overline{(x \Leftrightarrow y)}$

3) $(x \Leftrightarrow y)y\bar{x}$

4) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)xy\bar{z}$

5) $\overline{x \Rightarrow (y \Rightarrow (x \Leftrightarrow x))}$

6) $\overline{(\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow (y \Rightarrow x)}$

7) $\overline{(x \Rightarrow (y \Rightarrow xy))}$

8) $\overline{(\bar{x} \vee y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (\bar{x} \vee z)}$

9) $(x \Rightarrow y)(x + y)\bar{y}$

10) $(x \Leftrightarrow y)(x \downarrow y)(\bar{x} \Rightarrow y)$

IV. Решить уравнения

1) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z) = xz \Rightarrow \bar{y}$

2) $x \Leftrightarrow z\bar{y} = z \downarrow y \Rightarrow x$

3) $(x \mid y) \vee \bar{z} = (\bar{x} \downarrow z) \Rightarrow y$

4) $\bar{x} \Rightarrow (x \Rightarrow y) = x \vee \bar{y}$

5) $(x \Leftrightarrow y) \vee \bar{x} = y \Rightarrow x$

6) $(x \Rightarrow y) \vee (y \Rightarrow x) = x \downarrow y$

7) $x \Leftrightarrow y = y \Rightarrow ((x \vee \bar{y}) \Rightarrow x)$

8) $\overline{x \Rightarrow y} = x\bar{y}$

9) $x \Rightarrow y = x \downarrow y$

10) $xy \vee (y \Rightarrow x) \vee (x \Leftrightarrow z) = 0$

V. Какие из приведенных ниже формул являются тавтологиями, противоречиями, выполнимыми

1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \vee y) \Rightarrow (y \vee z))$

2) $((x + y) \Leftrightarrow z)(x \Rightarrow yz)$

3) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow ((x \Rightarrow y(y \Rightarrow z)) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$

4) $(x \Rightarrow z)(y \Rightarrow u)(\bar{x} \vee \bar{u}) \Rightarrow (\bar{x} \vee \bar{y})$

5) $(xy \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \Rightarrow (y \Rightarrow z))$

6) $((\bar{x} \vee \bar{y}) \downarrow (x + \bar{y})) + (\overline{x \Rightarrow \bar{y}} \Rightarrow (x \Rightarrow y))$

7) $((x \vee \bar{y})z \Rightarrow ((x \Leftrightarrow z) + y))xyz$

8) $(((x \mid y) \downarrow z) \mid y) \downarrow z$

9) $(x + y) \Leftrightarrow (x \Rightarrow z)(z \Rightarrow x)$

10) $((x \downarrow y) + (y \downarrow x)) \Rightarrow (z \Rightarrow y)z$

VI. Упростить

1) $(x \Rightarrow (y \vee z))(\bar{y} \Rightarrow u)(ux \Rightarrow \bar{z}) \Rightarrow y$

2) $(x \Rightarrow y) + ((y \Rightarrow z) + (z \Rightarrow x))$

3) $\overline{(x \Rightarrow y) \vee x\bar{z}} \downarrow (x \Leftrightarrow y)$

4) $((x + y) \Rightarrow (x \vee y))((x \vee y) \Rightarrow (x + y))$

5) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \vee (x \Rightarrow z)$

6) $(x \Rightarrow (y \vee z))(u \Rightarrow (x \vee y))(z \Rightarrow \bar{y})(u \Leftrightarrow \bar{z})(y \Rightarrow z)$

7) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x\bar{y} + (x \Leftrightarrow \bar{y}))$

8) $((x \mid y) \vee (x \Rightarrow y)) + (x \Leftrightarrow y)(y \Leftrightarrow x)$

9) $(x \Rightarrow y)(x \Leftrightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)(\bar{x} \downarrow z)$

10) $(x \mid y)(\bar{x} \downarrow \bar{y}) + ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z)(x \Rightarrow y)$

VII. Равносильны ли следующие формулы

1) $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$	$(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
2) $x + (y \Rightarrow z)$	$(x + y) \Rightarrow (x + z)$
3) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (x\bar{y} + (x \Leftrightarrow \bar{y}))$	$(x \vee y)(\bar{x} \vee \bar{y})$
4) $x \Rightarrow (xy \Rightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow y)z)$	$y \Rightarrow (x \Rightarrow z)$
5) $(x \vee y \vee z) \Rightarrow ((x \vee y)(x \vee z))$	$x \Leftrightarrow z$
6) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$	$x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$
7) $((x + y) \Rightarrow (x \vee y))((\bar{x} \Rightarrow y) \Rightarrow (x + y))$	$x \mid y$
8) $\overline{(x \Rightarrow y) \vee (x \Rightarrow z)y}$	$x\bar{y}(\bar{y} \Rightarrow x\bar{z})$
9) $\bar{x}\bar{z} \vee xy \vee x\bar{z}$	$x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}z$
10) $(x \vee y \vee z)(y \vee x \vee u)(z \vee u \vee x)$	$x \vee (y \vee zu)(u \vee z)$

Вопросы для самоконтроля

1 Булевы функции. Таблицы истинности.

2 Число булевых функций от n переменных.

3 Элементарные булевы функции.

4 Формулы алгебры логики. Классификация формул.

5 Равносильные формулы. Законы равносильности.

6 Логические уравнения.

Литература

1 Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика [Текст] : учебное пособие для студентов университетов/ В.Г.Карпов, В.А.Мощенский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1977. – 255с.

2 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

3 Мощенский, В.А. Лекции по математической логике [Текст] : учебное пособие для студентов математических специальностей вузов/ В.А.Мощенский. – Мн.: Изд. центр БГУ, 1973. – 159с.

Тема 2
НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

2.1 Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ).

2.2 Конъюнктивная нормальная форма (КНФ).

2.3 Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы и алгоритмы их построения.

Основные понятия по теме

Введем обозначение

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x & ,\text{если } \sigma = 1 \\ \bar{x} & ,\text{если } \sigma = 0 \end{cases}$$

Формула $x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i = \{0,1\}$, $i = 1,2,\ldots,n$, а среди переменных x_i могут быть совпадающие, называется *элементарной конъюнкцией*.

Дизъюнкция элементарных конъюнкций называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно ДНФ).

Элементарная конъюнкция называется *правильной*, если в нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождение под знаком отрицания).

Правильная элементарная конъюнкция называется *полной относительно переменных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если в нее каждая из этих переменных входит один и только один раз.

Совершенной дизъюнктивной нормальной формой (СДНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется дизъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных конъюнкций и все элементарные конъюнкции правильны и полны относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Всякую булеву функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не равную тождественно нулю, можно представить совершенной дизъюнктивной нормальной формой:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bigvee_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 1}} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

<u>Пример 1</u> Найти ДНФ для формулы $(((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \mid y) \vee (x \Leftrightarrow z)$.

$$(((x \Rightarrow y) \Rightarrow z) \mid y) \vee (x \Leftrightarrow z) = \overline{\overline{\bar{x} \vee y} \vee z} \vee \bar{y} \vee xz \vee \bar{x}\bar{z} =$$
$$= (\bar{x} \vee y)z \vee \bar{y} \vee xz \vee \bar{x}\bar{z} = \bar{x}z \vee yz \vee \bar{y} \vee xz \vee \bar{x}\bar{z}$$

<u>Пример 2</u> Найти СДНФ для формулы $(x \Leftrightarrow y) \vee (y \Leftrightarrow z)$.

1 способ (табличный). Данный способ основан на разложении (1). Суть его состоит в следующем:

1. составляется таблица истинности для данной формулы;
2. в таблице истинности выделяются наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, для которых значение формулы истинно;
3. для каждого такого набора составляются элементарные конъюнкции;
4. составляем дизъюнкции построенных элементарных конъюнкций.

x	y	z	$x \Leftrightarrow y$	$y \Leftrightarrow z$	$(x \Leftrightarrow y) \vee (y \Leftrightarrow z)$
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

$$(x \Leftrightarrow y) \vee (y \Leftrightarrow z) =$$
$$= x^0 y^0 z^0 \vee x^0 y^0 z^1 \vee x^0 y^1 z^1 \vee x^1 y^0 z^0 \vee x^1 y^1 z^0 \vee x^1 y^1 z^1 =$$
$$= \overline{x}\overline{y}z \vee \overline{x}\overline{y}z \vee \bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee xyz$$

2 способ (аналитический).

$$(x \Leftrightarrow y) \vee (y \Leftrightarrow z) \overset{15}{=} xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee yz \vee \overline{y}\,\overline{z} \overset{3}{=}$$
$$= xy(z \vee \overline{z}) \vee \overline{x}\,\overline{y}(z \vee \overline{z}) \vee yz(x \vee \overline{x}) \vee \overline{y}\,\overline{z}(x \vee \overline{x}) \overset{8}{=}$$
$$= xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \overset{5}{=}$$
$$= xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}\,\overline{z}.$$

Формула вида $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ называется *элементарной дизъюнкцией*.

Всякая конъюнкция элементарных дизъюнкций называется *конъюнктивной нормальной формой* (КНФ).

Элементарная дизъюнкция называется *правильной*, если у нее каждая переменная входит не более одного раза (включая ее вхождение под знаком отрицания).

Правильная элементарная конъюнкция называется *полной* относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, если каждая из этих переменных входит в нее один и только один раз (быть может, под знаком отрицания).

Совершенной конъюнктивной нормальной формой (СКНФ) относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется конъюнктивная нормальная форма, в которой нет одинаковых элементарных дизъюнкций и все элементарные дизъюнкции правильны и полны относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Всякую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ отличную от тождественно истинной, можно представить совершенной конъюнктивной нормальной формой:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathop{\&}_{\substack{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \\ f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = 0}} \left(x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}} \right) \qquad (2)$$

где символ & означает, что конъюнкция берется по тем наборам, которые указаны под ним.

<u>Пример 3</u> Найти КНФ для формулы $(x \Rightarrow y) \vee (x \Leftrightarrow z)$.

$$(x \Rightarrow y) \vee (x \Leftrightarrow z) \overset{14,15}{=} \bar{x} \vee y \vee xz \vee \bar{x}\bar{z} \overset{7}{=}$$

$$= \bar{x}(1 \vee \bar{z}) \vee y \vee xz \overset{10}{=} \bar{x} \vee y \vee xz \overset{7}{=}$$

$$= (\bar{x} \vee y \vee x)(\bar{x} \vee y \vee z) \overset{3,10}{=} \bar{x} \vee y \vee z .$$

<u>Пример 4</u> Найти СКНФ для формулы $(x + y)(z \Rightarrow x)$.

1 способ (табличный). Данный способ основан на разложении (2). Суть его состоит в следующем:

1. составляется таблица истинности для данной формулы;

2. в таблице истинности выделяются наборы $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, для которых значение формулы ложно;

3. для каждого такого набора составляются элементарная дизъюнкция $x_1^{\overline{\sigma_1}} \vee x_2^{\overline{\sigma_2}} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma_n}}$;

4. составляем конъюнкцию элементарных дизъюнкций.

x	y	z	$x+y$	$z \Rightarrow x$	$(x+y)(z \Rightarrow x)$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	0

$$(x + y)(z \Rightarrow x) =$$
$$= \left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{0}}\right)\left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{0}} \vee z^{\bar{1}}\right)\left(x^{\bar{0}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}\right)\left(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{0}}\right)\left(x^{\bar{1}} \vee y^{\bar{1}} \vee z^{\bar{1}}\right) =$$
$$= (x \vee y \vee z)(x \vee y \vee \bar{z})(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$$

2 способ (аналитический).

$$(x+y)(z\Rightarrow x)\overset{14,16}{=}(\bar{x}y\vee\bar{y}x)(\bar{z}\vee x)\overset{7}{=}$$
$$=(\bar{x}\vee\bar{y})(x\vee y)(\bar{x}\vee x)(\bar{y}\vee y)(\bar{z}\vee x)\overset{3}{=}$$
$$=(\bar{x}\vee\bar{y})(x\vee y)(x\vee\bar{z})\overset{2}{=}$$
$$=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z\bar{z})(x\vee y\vee z\bar{z})(x\vee\bar{z}\vee y\bar{y})\overset{7}{=}$$
$$=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee y\vee z)(x\vee y\vee\bar{z})(x\vee y\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee\bar{z})\overset{5}{=}$$
$$=(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee\bar{z})(x\vee y\vee z)(x\vee y\vee\bar{z})(x\vee\bar{y}\vee\bar{z}).$$

Полиномом Жегалкина называется полином вида

$$\sum x_{i_1}x_{i_2}\dots x_{i_n}+a$$

причем в каждом наборе $i_1, i_2, \dots, i_n$ все различны, а суммирование ведется по некоторому множеству таких не совпадающих наборов, a - константа 0 или 1.

Справедливы следующие равносильности:

1. $x+y=y+x$
2. $x+(y+z)=(x+y)+z$
3. $x(y+z)=xy+xz$
4. $x+x=0$
5. $\bar{x}=x+1$

Каждая булева функция может быть единственным образом выражена при помощи полинома Жегалкина.

Пример 5 Выразить формулу $x\Rightarrow y$ в виде полинома Жегалкина.

1 способ (метод неопределенных коэффициентов).

$x\Rightarrow y=axy+bx+cy+d$

При $x=y=0$ имеем: $d=1$;

При $x=0, y=1$ имеем: $c=0$;

При $x=1, y=1$ имеем: $b=1$;

При $x=1, y=1$ имеем: $1=a+b+c+d=a+1+0+1=a$, т.е. $a=1$.

Отсюда $x \Rightarrow y = xy+x+1$.

2 способ.

$$x \Rightarrow y \overset{14}{=} \bar{x} \vee y \overset{20}{=} \overline{x\bar{y}} \overset{25}{=} \overline{x(y+1)} \overset{25}{=} x(y+1)+1 \overset{23}{=} xy+x+1$$

Приведем полиномы Жегалкина элементарных булевых функций

$x \vee y = xy+x+y$

$x \Rightarrow y = xy+x+1$

$x \Leftrightarrow y = x+y+1$

$x \mid y = xy+1$

$x \downarrow y = xy+x+y+1$

Лабораторная работа №2

I. Найти ДНФ для формулы

1) $((x+y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \Rightarrow y)$

2) $(x+y+\bar{z}) \Rightarrow (u \downarrow x)$

3) $((x \mid y) \downarrow z) \Rightarrow (x \Leftrightarrow z)$

4) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow z)((x+y) \Rightarrow z)$

5) $(x \Rightarrow yz) + (x \Leftrightarrow yz)$

6) $(xy \vee z) \Leftrightarrow ((y \Rightarrow z) \Leftrightarrow x)$

7) $f(x,y,z) = (01101101)$

8) $f(x,y,z) = (11011001)$

9) $f(x,y,z) = (00011101)$

10) $f(x,y,z) = (10000101)$

II. Найти СДНФ для формулы

1) $(\bar{x} \Rightarrow \bar{y}) \Rightarrow (yz \Rightarrow xz)$

2) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{x}) \Rightarrow (x \Rightarrow yx)$

3) $(x + y) \Rightarrow yz$

4) $((xy + z) \Rightarrow x \mid y) \Rightarrow z$

5) $f(x, y, z) = (01101100)$

6) $f(x, y, z) = (10001110)$

7) $(x + y + z) \Leftrightarrow (x \downarrow y)$

8) $((x \Leftrightarrow y)) \Rightarrow (x + yz)$

9) $(x \Rightarrow (y \downarrow z)) + (x \vee y)$

10) $(x \vee y \vee z) \Leftrightarrow (x + y)$

III. Найти КНФ для формулы

1) $f(x, y, z) = (00100101)$

2) $f(x, y, z) = (01111000)$

3) $((x + y) \downarrow (x \Rightarrow y)) \Rightarrow z$

4) $(x \vee y \vee z) + (x \Leftrightarrow (y \downarrow \bar{z}))$

5) $((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x + \bar{y})) \Rightarrow z$

6) $((x \mid y) \downarrow \bar{z}) \Rightarrow (x + y\bar{z})$

7) $(x \Leftrightarrow (y + \bar{z})) \Leftrightarrow (x \downarrow z)$

8) $(x + y + z) \Rightarrow (x \vee y\bar{z})$

9) $(x \Leftrightarrow (y \vee z)) + (y \Leftrightarrow xz)$

10) $(x \vee (y + \bar{z})) \Leftrightarrow (y \downarrow \bar{z})$

IV. Найти СКНФ для формулы

1) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow (\overline{z \vee x} \Rightarrow y)$

2) $\overline{xy \Rightarrow x} \vee x(y \vee z)$

3) $f(x,y,z) = (01100101)$

4) $f(x,y,z) = (00011101)$

5) $\overline{x(y \vee z)} \Rightarrow (xy \vee z)$

6) $(x + (y \vee z)) \Leftrightarrow (x \Rightarrow (y \downarrow z))$

7) $((x \downarrow y) \downarrow z) + ((x \Rightarrow y) \Rightarrow z)$

8) $((x + y + z) \Leftrightarrow z) \Rightarrow y$

9) $(\overline{x \vee y} + z) \Rightarrow ((x \downarrow y) \mid z)$

10) $(xyz \Rightarrow (x \vee \bar{z})) \Rightarrow (x \downarrow y)$

V. Найти полином Жегалкина для формулы

1) $f(x,y,z) = (x \mid y) \downarrow z$

2) $f(x,y,z) = (01111110)$

3) $f(x,y,z) = (00001001)$

4) $f(x,y,z) = (10000001)$

5) $f(x,y,z) = (x \Rightarrow y)(y \downarrow z)$

6) $((x \Rightarrow y) \vee \bar{z}) \mid x$

7) $(x \Rightarrow y) + (\bar{x} \Leftrightarrow z)$

8) $(x \downarrow \bar{y}) \mid z \vee (x \Rightarrow y)$

9) $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \vee (x \mid y)$

10) $f(x,y,z) = (10110000)$

Вопросы для самоконтроля

1 Разложение булевых функций по переменным.

2 ДНФ и КНФ. Алгоритм их нахождения.

3 СДНФ и СКНФ. Алгоритмы их нахождения.

4 Полином Жегалкина, алгоритмы его нахождения.

Литература

1 Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика [Текст] : учебное пособие для студентов университетов/ В.Г.Карпов, В.А.Мощенский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1977. – 255с.

2 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

3 Мощенский, В.А. Лекции по математической логике [Текст] : учебное пособие для студентов математических специальностей вузов/ В.А.Мощенский. – Мн.: Изд. Центр БГУ, 1973. – 159с.

Тема 3
МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

3.1 Сокращенная ДНФ.

3.2 Алгоритмы построения сокращенной ДНФ.

3.3 Алгоритм построения тупиковой ДНФ.

3.4 Импликантная матрица.

Основные понятия по теме

Дизъюнктивная нормальная форма называется *минимальной*, если она включает минимальное число символов по сравнению со всеми другими эквивалентными ей дизъюнктивными нормальными формами.

Заметим, что если некоторый символ в формуле, скажем, x_i встречается, например, два раза, то при подсчете числа символов в формуле он учитывается два раза.

Рангом правильной элементарной конъюнкции называется число символов, входящих в нее.

Сопоставим каждой булевой функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ подмножество $N_f = \{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \mid f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = 1\}$, которое будем называть областью истинности функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пусть $f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_n$ - ДНФ, где K_i - элементарные конъюнкции. Подмножество N_K называется интервалом r-го ранга, если оно соответствует элементарной конъюнкции K r-го ранга. С каждой ДНФ функции f связано покрытие $N_f = N_{K_1} \bigcup N_{K_2} \bigcup \ldots \bigcup N_{K_n}$ интервалами $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{K_n}$, таких что $N_{K_i} \subseteq N_f$.

Интервал $N_{K_i} \subseteq N_f$, называется *максимальным* для булевой функции, если не существует интервала $N_{K'}$ такого, что $N_K \subset N_{K'} \subseteq N_f$.

Если $N_{K_1}, N_{K_2}, \ldots, N_{K_m}$ - список всех максимальных интервалов подмножества N_f, то $N_f = N_{K_1} \bigcup N_{K_2} \bigcup \ldots \bigcup N_{K_m}$.

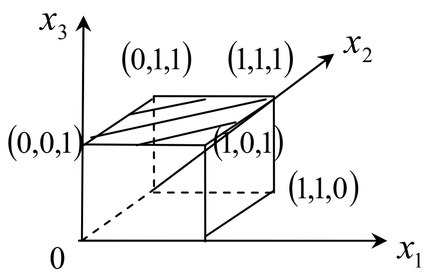
ДНФ $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$ булевой функции f, соответствующая покрытию подмножества N_f всеми максимальны ми интервалами, называется *сокращенной* ДНФ функции f.

Сокращенная ДНФ для любой булевой функции f определяется однозначно.

Рассмотрим алгоритмы построения сокращенная ДНФ.

1 алгоритм – табличный.

Пример 1 Найти сокращенную ДНФ для $\bar{x}_2 x_3 \vee \bar{x}_1 x_3 \vee x_1 x_2 = f(x_1, x_2, x_3)$.



Найдем $N_f = \{(1,1,0);(1,1,1);(0,0,1);(1,0,1);(0,1,1)\}$

Интервалы $N_{K_1} = \{(0,0,1);(0,1,1);(1,1,1);(1,0,1)\}$ и $N_{K_2} = \{(1,1,0);(1,1,1)\}$ - все максимальные интервалы $f = K_1 \vee K_2 = x_3 \vee x_1 x_2$ - сокращенная ДНФ.

2 алгоритм – метод Блейка:

1) находим ДНФ;

2) производим обобщенные склеивания $xK_1 \vee \bar{x}K_2 = xK_1 \vee \bar{x}K_2 \vee K_1K_2$ до тех пор, пока это возможно;

3) применяем правило поглощения $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

<u>Пример 2</u> Найти сокращенную ДНФ для $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee \bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_3$.

Применяя правило обобщенного склеивания, получаем:

$x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_2x_3 \vee x_3 \vee x_1x_3$

Затем правило поглощения и находим сокращенную ДНФ $x_1x_2 \vee x_3$.

3 алгоритм – метод Нельсона:

1) находим КНФ;

2) разрываем скобки в соответствии с дистрибутивным законом;

3) применяем правило поглощения.

<u>Пример 3</u> Найти сокращенную ДНФ для функции $f(x, y, z) = (x \vee y)(\bar{x} \vee y \vee z)$.

После раскрытия скобок с помощью дистрибутивного закона, получаем $x\bar{x} \vee xy \vee xz \vee y\bar{x} \vee yy \vee yz$. Так как $x\bar{x} = 0$, $yy = y$, то имеем

$xy \vee xz \vee y\bar{z} \vee y \vee yz$.

Применяя правило поглощения, получаем сокращенную ДНФ.

IV алгоритм – метод минимизирующих карт.

<u>Пример 4</u> Найти сокращенную ДНФ для функции $f(x, y, z, u) = (1001100111010011)$.

Составим минимизирующую карту для данной функции.

	x_3	0	0	1	1
x_1	x_4 / x_2	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0

Объединяя соседние клетки, соответствующие единичным значениям булевой функции f в максимальные интервалы, и сопоставляя им элементарные конъюнкции, получим сокращенную ДНФ. Отметим, что клетки, расположенные по краям таблицы, также считаются соседними.

Выпишем все максимальные интервалы

$N_{K_1} = \{(0,0,0,0);(0,1,0,0)\}$ $\qquad K_1 = \bar{x}\bar{z}\bar{u}$

$N_{K_2} = \{(0,1,0,0);(0,1,1,0)\}$ $\qquad K_2 = \bar{x}y\bar{u}$

$N_{K_3} = \{(1,0,0,1);(1,0,1,1)\}$ $\qquad K_3 = x\bar{y}\bar{u}$

$N_{K_4} = \{(0,0,1,1);(0,1,1,1);(1,1,1,1);(1,0,1,1)\}$ $\qquad K_4 = zu$

$N_{K_5} = \{(0,1,1,1);(0,1,1,0);(1,1,1,1);(1,1,1,0)\}$ $\qquad K_5 = yz$

Итак, $K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_4 \vee K_5 = \bar{x}\bar{z}\bar{u} \vee \bar{x}y\bar{u} \vee x\bar{y}\bar{u} \vee zu \vee yz$ - требуемая сокращенная ДНФ.

Следующее утверждение устанавливает связь между минимальной и сокращенной ДНФ.

Минимальная ДНФ булевой функции получается из сокращенной ДНФ данной функции путем удаления некоторых элементарных конъюнкций.

Покрытие множества N_f максимальными интервалами называется *неприводимым*, если после удаления из него любого интервала оно перестает быть покрытием. ДНФ булевой функции, соответствующее неприводимому покрытию, называется *тупиковой*.

Всякая минимальная ДНФ является тупиковой.

Общая схема решения задачи минимизации булевых функций состоит в следующем:

1. выделяются все максимальные интервалы и строится сокращенная ДНФ;
2. строятся все тупиковые ДНФ;
3. среди всех тупиковых ДНФ выделяются все минимальные ДНФ.

Рассмотрим алгоритм построения всех тупиковых ДНФ. Суть данного алгоритма состоит в следующем:

1. для булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ строим сокращенную ДНФ;
2. для каждого набора a_j из N_f, $j = 1,2,\ldots,K$ выделяем в сокращенной ДНФ функции f все такие элементарные конъюнкции $K_{ij}, \ldots, K_{tj}$, что $K_{ij}(a_j) = 1$, $i = 1,2,\ldots,t$;
3. составляем выражение вида
$$\begin{gathered}(K_{11} \vee K_{12} \vee \ldots \vee K_{1t})(K_{21} \vee K_{22} \vee \ldots \vee K_{2t})\ldots \\ \ldots(K_{K1} \vee K_{K2} \vee \ldots \vee K_{Kt})\end{gathered} \qquad (*)$$
4. применяем к выражению вида (*) законы дистрибутивности и поглощения. В результате получаем
$$\vee K_{i1}K_{i2}\ldots K_{im}$$

Теперь каждая ДНФ $K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{im}$ является тупиковой ДНФ функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим работу данного алгоритма на следующем примере.

<u>Пример 5</u> Найти все тупиковые ДНФ для булевой функции $f(x, y, z) = (01111110)$.

Найдем сокращенную ДНФ данной функции по методу Нельсона. Для этого составим СКНФ данной функции, используя разложение (2)
$$(x \vee y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$$
Применяя закон дистрибутивности, получаем: $x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$

Обозначим $K_1 = x\bar{y}$, $K_2 = x\bar{z}$, $K_3 = \bar{x}y$, $K_4 = y\bar{z}$, $K_5 = z\bar{x}$, $K_6 = z\bar{y}$.

$N_f = \{(0,0,1); (0,1,0); (0,1,1); (1,0,0); (1,0,1); (1,1,0)\}$ составляем выражение (*)
$$(K_5 \vee K_6)(K_3 \vee K_4)(K_3 \vee K_5)(K_1 \vee K_2)(K_1 \vee K_6)(K_2 \vee K_4) =$$
$$= (K_5 \vee K_3K_6)(K_4 \vee K_2K_3)(K_1 \vee K_2K_6) =$$
$$= K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_2K_3K_6 \vee$$
$$\vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_2K_3K_5K_6 \vee K_2K_3K_4K_6 \vee$$

$\vee K_2K_3K_6 = K_1K_4K_5 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_6 \vee K_1K_2K_3K_6 \vee$
$\vee K_2K_4K_5K_6 \vee K_2K_3K_6$

Таким образом, $f(x, y, z)$ имеет шесть тупиковых ДНФ

$D_1 = K_1 \vee K_4 \vee K_5 = x\bar{y} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x}$

$D_2 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_5 = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{x}$

$D_3 = K_1 \vee K_2 \vee K_4 \vee K_6 = x\bar{y} \vee \bar{x}y \vee y\bar{z} \vee z\bar{y}$

$D_4 = K_1 \vee K_2 \vee K_3 \vee K_6 = x\bar{y} \vee x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$

$D_5 = K_2 \vee K_4 \vee K_5 \vee K_6 = x\bar{z} \vee y\bar{z} \vee z\bar{x} \vee z\bar{y}$

$D_6 = K_2 \vee K_3 \vee K_6 = x\bar{z} \vee \bar{x}y \vee z\bar{y}$

Две из них D_1 и D_6 являются минимальными ДНФ (метод Квайна).

Рассмотрим метод импликантных матриц нахождения минимальных ДНФ.

Для булевой функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ находим сокращенную ДНФ $f = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_t$. Построим для этой функции импликантную матрицу, представляющую собой таблицу, в вертикальные входы которой записываются $K_1, K_2, \ldots, K_t$, и в горизонтальные $N_f = \{\tilde{a}_1, \ldots \tilde{a}_p\}$

	$\tilde{a}_1$	$\tilde{a}_2$	$\ldots$	$\tilde{a}_j$	$\ldots$	$\tilde{a}_p$
K_1						
K_2						
$\ldots$						
K_i				$+$		
$\ldots$						
K_t						

Для каждой K_i находим набор $\tilde{a}_j$ такой, что $K_{ij}(a_j) = 1$. Клетку импликантной матрицы, образованную пересечением i-ой строки и j-ого столбца отметим крестиком.

Чтобы получить минимальную ДНФ заданной функции, достаточно найти минимальное число K_i, $i = 1,2,\ldots,t$, которые совместно накрывают крестиками все столбцы импликантной матрицы.

Пример 6 Найти минимальные ДНФ для функции $f(x,y,z)=(x\vee y\vee z)(\bar{x}\vee\bar{y}\vee z)$.

Из предыдущего примера следует, что сокращенная ДНФ для данной функции $x\bar{y}\vee x\bar{z}\vee\bar{x}y\vee y\bar{z}\vee z\bar{x}\vee z\bar{y}$.

Строим импликантную матрицу

	$(0,0,1)$	$(0,1,0)$	$(0,1,1)$	$(1,0,0)$	$(1,0,1)$	$(1,1,0)$
$x\bar{y}$				+	+	
$x\bar{z}$				+		+
$\bar{x}y$		+	+			
$y\bar{z}$		+				+
$z\bar{x}$	+		+			
$z\bar{y}$	+				+	

Из таблицы видно, что данная функция имеет две минимальные ДНФ: $x\bar{y}\vee y\bar{z}\vee z\bar{x}$, $x\bar{z}\vee\bar{x}y\vee z\bar{y}$.

Лабораторная работа №3

I. Найти сокращенную ДНФ графическим методом

1) $f(x,y,z)=(01101010)$
2) $f(x,y,z)=(01110110)$
3) $f(x,y,z)=(11100001)$
4) $f(x,y,z)=(10100110)$
5) $f(x,y,z)=(01111010)$
6) $f(x,y,z)=(11110001)$
7) $f(x,y,z)=(01111110)$
8) $f(x,y,z)=(01010101)$
9) $f(x,y,z)=(10110001)$
10) $f(x,y,z)=(01011110)$

II. Найти сокращенную ДНФ методом Блейка

1) $\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}u \vee y\bar{z}u$

2) $\bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}u \vee zu$

3) $x\bar{y} \vee \bar{x}yz \vee xu \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

4) $xyu \vee \bar{z}\bar{u} \vee \bar{x}\bar{y}$

5) $xy \vee \bar{x}z \vee x\bar{y}zu \vee \bar{x}yzu$

6) $xyz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{y}u \vee ux$

7) $xyu \vee \bar{x}z \vee \bar{y}z \vee \bar{x}u$

8) $x\bar{y} \vee \bar{x}\bar{y}u \vee \bar{x}\bar{u}$

9) $xyz \vee \bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}z \vee \bar{x}z$

10) $\bar{x}\bar{y} \vee x\bar{y}u \vee \bar{x}\bar{z}\bar{u} \vee zyu$

III. Найти сокращенную ДНФ методом Нельсона

1) $(x \vee y \vee \bar{z})(\bar{x} \vee y \vee z)(\bar{y} \vee \bar{z})$

2) $(x \vee u)(y \vee \bar{z} \vee \bar{u})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

3) $(x \vee \bar{y} \vee \bar{z})(\bar{x} \vee u)(y \vee z \vee \bar{u})$

4) $(x \vee \bar{y} \vee u)(\bar{x} \vee \bar{u})(x \vee y \vee z)$

5) $(\bar{x} \vee \bar{u})(x \vee \bar{y} \vee \bar{u})(x \vee y \vee z)(\bar{y} \vee z)$

6) $(x \vee y \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee u)(\bar{y} \vee \bar{z})$

7) $(x \vee y)(x \vee \bar{z} \vee \bar{y})(\bar{x} \vee \bar{u} \vee \bar{y})$

8) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})(x \vee \bar{u})(\bar{x} \vee y \vee u)$

9) $(x \vee z \vee \bar{u})(\bar{x} \vee \bar{z} \vee u)(y \vee \bar{u})$

10) $(x \vee y \vee u)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(\bar{u} \vee \bar{z})$

IV. Найти сокращенную ДНФ методом минимизирующих карт

1) $f(x, y, z, u) = (0011101110001101)$

2) $f(x,y,z,u)=(1001011100111001)$

3) $f(x,y,z,u)=(1101011000011110)$

4) $f(x,y,z,u)=(0010110101110111)$

5) $f(x,y,z,u)=(0011101101100010)$

6) $f(x,y,z,u)=(1011010111001100)$

7) $f(x,y,z,u)=(0001101010111010)$

8) $f(x,y,z,u)=(1001101000101101)$

9) $f(x,y,z,u)=(1001101010110101)$

10) $f(x,y,z,u)=(0011101000111001)$

VI. Найти все минимальные ДНФ

1) $f(x,y,z,u)=(0000110010101111)$

2) $\bar{x}yz \vee x\bar{y}\bar{z} \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}y\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z$

3) $f(x,y,z,u)=(1111100001001100)$

4) $f(x,y,z,u)=(0000001111111101)$

5) $f(x,y,z,u)=(0001101111011011)$

6) $f(x,y,z,u)=(1110011000010101)$

7) $f(x,y,z,u)=(0110101111011110)$

8) $\bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}z \vee xyz \vee xy\bar{z} \vee x\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}$

9) $f(x,y,z)=(x \vee \bar{z})(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z)(y \vee z)(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z})$

10) $\bar{x}y\bar{z}u \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}\bar{u} \vee xy\bar{z}u$

Вопросы для самоконтроля

1 Минимальная дизъюнктивная нормальная форма.

2 Область истинности булевой функции.

3 Интервал.

4 Покрытие области истинности.

5 Сокращенная ДНФ.

6 Алгоритмы построения сокращенной ДНФ (Блейка, Нельсона, минимизирующих карт).

7 Неприводимое покрытие.

8 Тупиковые ДНФ и алгоритм их построения.

9 Метод импликантных матриц (метод Квайна).

Литература

1 Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика [Текст]: учебное пособие для студентов университетов/ В.Г.Карпов, В.А.Мощенский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1977. – 255с.

2 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст]: учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

<u>**Тема 4**</u>

КОНТАКТНЫЕ И ЛОГИЧЕСКИЕ СХЕМЫ

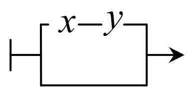
4. 1 Анализ и синтез контактных схем.

4.2 Двоичный сумматор

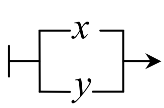
Основные понятия по теме

В начале нынешнего века известный физик П. Эренфест впервые указал на возможность применения аппарата алгебры логики в технике. Эта идея нашла свое воплощение в работах советского физика В.И. Шестакова, американского математика К. Шеннона и японского инженера А. Касасима. Первыми объектами применения алгебры логики для решения технических задач были контактные схемы. Под *контактными схемами* мы будем понимать электрические цепи, содержащие только контакты. Каждый контакт может находиться в двух состояниях – разомкнут (0) и замкнут (1). Такие цепи мы будем изображать диаграммой, на которой возле контактов пишется x_i или $\bar{x}_i$. Причем значение 1 этих переменных соответствует прохождению тока через данный контакт, а значение 0 нет.

Если контакты x и y соединены последовательно, то цепь замкнута, когда оба контакта замкнуты и разомкнута, когда хотя бы один из контактов разомкнут. Ясно, что такой схеме



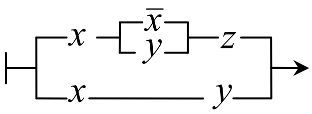
соответствует функция xy. Схема



соответствует булева функция $x \vee y$.

Указанное соответствие позволяет любую булеву функцию представить в виде контактной схема. С другой стороны любая контактная схема реализуется булевой функцией. Задача анализа контактной схемы и состоит в построении соответствующей ей булевой функции.

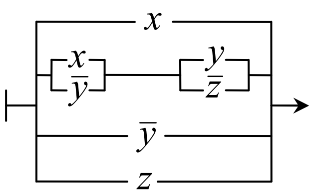
Например, контактная схема



реализуется булевой функцией $x(\bar{x} \vee y)z \vee xy$.

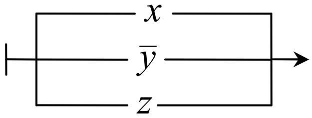
Поскольку одна и та же булева функция может быть выражена различными формулами, то ее реализация контактными схемами неоднозначна. Задача синтеза контактной схемы состоит в построении контактной схемы по заданной булевой функции, которая может быть задана как формулой, так и таблицей. Из множества эквивалентных схем, путем упрощения формул выделяют наиболее простую схему. Центральной проблемой синтеза контактных схем является построение для данной булевой функции более простой схемы. Эта проблема сводится к минимизации булевых функций.

Рассмотрим схему



Данная схема реализуется следующей формулой $x \vee (x \vee \bar{y})(y \vee \bar{z}) \vee \bar{y} \vee z$. Упростим ее

$$x \vee xy \vee x\bar{z} \vee y\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{y} \vee z =$$
$$= x(1 \vee y \vee \bar{z}) \vee \bar{y}(y \vee \bar{y} \vee 1) \vee z = x \vee \bar{y} \vee z$$



Пример 1 Из контактов x, y, z составить по возможности более простую схему так, чтобы она замкнулась тогда и только тогда, когда замкнуты не менее двух контактов.

Составим таблицу истинности для булевой функции, соответствующей требуемой контактной схеме

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

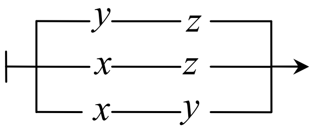
Найдем для данной булевой функции СДНФ

$f(x,y,z)=\bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz$

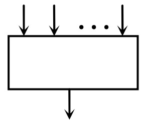
Упростим данную формулу

$\bar{x}yz\vee x\bar{y}z\vee xy\bar{z}\vee xyz=yz(\bar{x}\vee x)\vee xz(\bar{y}\vee y)\vee xy(\bar{z}\vee z)=yz\vee xz\vee xy$

Данной формуле соответствует схема



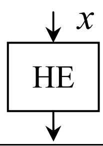
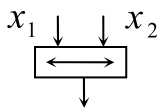
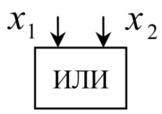
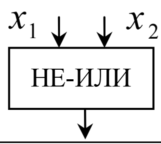
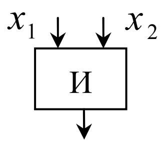
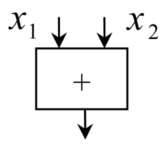
Контактные схемы исторически были первыми техническими средствами реализации булевых функций. В дальнейшем появилось много различных устройств, реализующих булевы функции. Пусть имеется некоторое устройство



имеющее n упорядоченных «входов» и один «выход», причем внутренняя структура этого устройства нас не интересует. На каждый из входов могут подаваться два сигнала, которые мы будем обозначать символами 0 и 1.

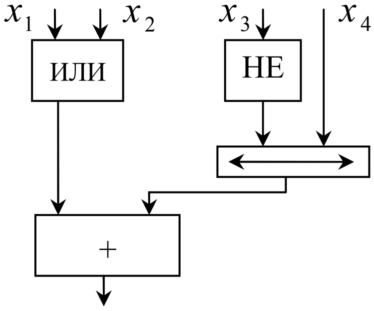
При каждом наборе сигналов на входах и выходе возникает один из сигналов 0 или 1. Причем набор сигналов на входах однозначно определяет сигнал на выходе. Очевидно, что каждое такое устройство реализует булеву функцию.

Устройства, реализующие элементарные булевы функции, называются *логическими элементами*. Логические элементы изображаются в виде прямоугольников, внутри которых помещаются условные названия или символы соответствующих функций.

Функция	Графическое изображение	Функция	Графическое изображение
$\bar{x}$		$x_1 \Leftrightarrow x_2$	
$x_1 \vee x_2$		$x_1 \mid x_2$	
$x_1 x_2$		$x_1 + x_2$	
$x_1 \Rightarrow x_2$			

Из данных логических элементов путем соединения входа одного из них с выходом другого можно строить все более сложные логические схемы. Для получения таким образом схем легко записывают соответствующие им булевы функции.

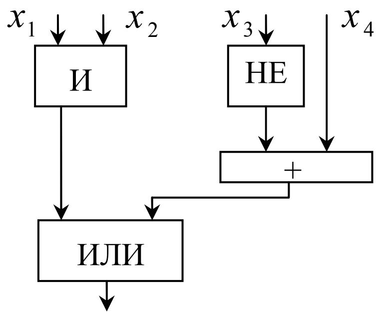
Например, схема



реализуется булевой функцией $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \vee x_2) + (\bar{x}_3 + x_4)$

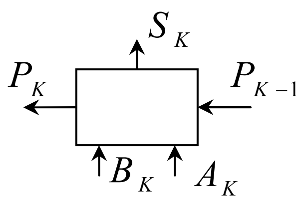
Нетрудно для любой булевой функции построить реализующую ее логическую схему.

Например: $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 \vee (\bar{x}_3 + x_4)$



Пример Построить логическую схему одноразрядного двоичного сумматора.

Сумматор, выполняющий сложение многозначных двоичных чисел, представляет собой последовательное соединение одноразрядных двоичных сумматоров, каждый из которых осуществляет сложение в одном определенном разряде и перенос в старший разряд. Рассмотрим одноразрядный двоичный сумматор, осуществляющий сложение в k-м разряде, т.е. устройство с тремя входами A_K, B_K, P_{K-1} и двумя выходами S_K и P_K.



Здесь S_K - получаемая сумма, P_{K-1} - перенос из младшего разряда, P_K – перенос в старший разряд. Выходы S_K и P_K представляют собой значения некоторых функций, определенных на множестве всевозможных наборов значения входов A_K, B_K, P_{K-1}, т.е. $S_K = f(A_K, B_K, P_{K-1})$, $P_K = \varphi(A_K, B_K, P_{K-1})$.

Входы			Выходы	
A_K	B_K	P_{K-1}	S_K	P_K
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Найдем выражение для S_K и P_K. Для упрощения записей обозначим A_K, B_K, P_{K-1} соответственно через A, B, C, а S_K и P_K - через S и P.

Тогда $P = \overline{A}BC \vee A\overline{B}C \vee AB\overline{C} \vee ABC$,$S = \overline{A}\,\overline{B}C \vee \overline{A}B\overline{C} \vee A\overline{B}\,\overline{C} \vee ABC$.

Упростим данные выражения

$$P = BC\left(\overline{A} \vee A\right) \vee AV\left(\overline{B} \vee B\right) \vee AB\left(\overline{C} \vee C\right) = BC \vee AC \vee AB$$

$$S = ABC \vee \overline{\left(A \vee B \vee \overline{C}\right)\left(A \vee \overline{B} \vee C\right)\left(\overline{A} \vee B \vee C\right)} =$$

$$= ABC \vee \overline{AB \vee AC \vee BC \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} =$$

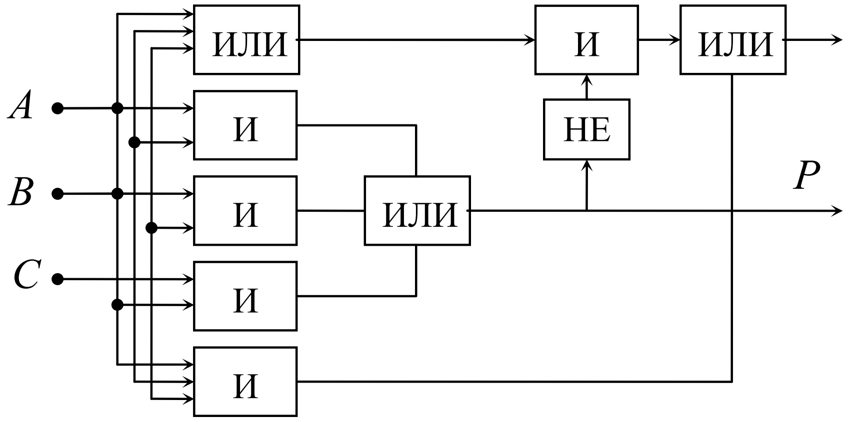
$$= ABC \vee \overline{P \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}} = ABC \vee \left(A \vee B \vee C\right)\overline{P}$$

Таким образом

$$P = BC \vee AC \vee AB$$

$$S = ABC \vee \left(A \vee B \vee C\right)\overline{P}$$

Отсюда получаем схему одноразрядного двоичного сумматора



Лабораторной работе №4

I. Составить контактные и логические схемы для функций

1) $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z) \Rightarrow (x \Rightarrow z)$

2) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{x}(y \vee z)$

3) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Rightarrow (y \Rightarrow \bar{x})$

4) $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow z)$

5) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow \bar{x}(y \vee z)$

6) $((x + y) \Rightarrow z) \Rightarrow x\bar{y}$

7) $(x \Leftrightarrow y)(x \Rightarrow y) \vee (x \downarrow y)$

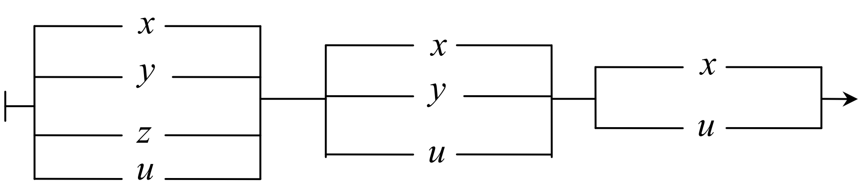
8) $((x \mid y) \Leftrightarrow x \downarrow \bar{z}) \Rightarrow x$

9) $((x + y) \vee (x \downarrow y)) \Rightarrow x\bar{z}$

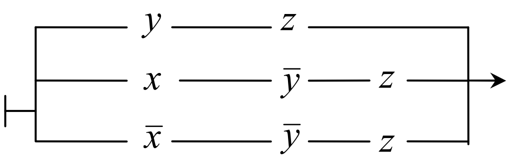
10) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (x + z)$

II. Упростить схемы

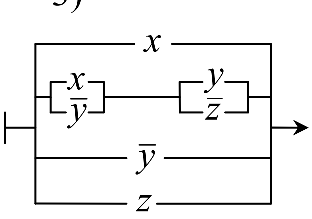
1)



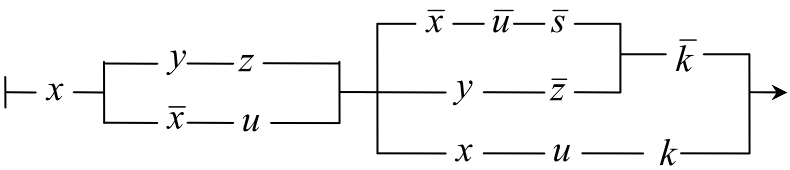
2)



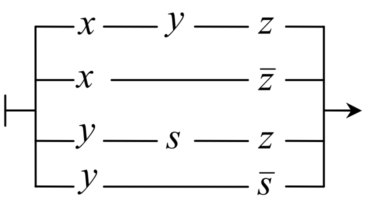
3)



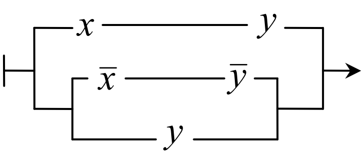
4)



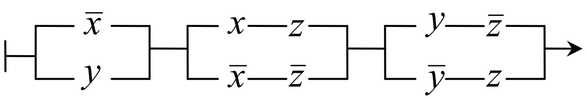
5)



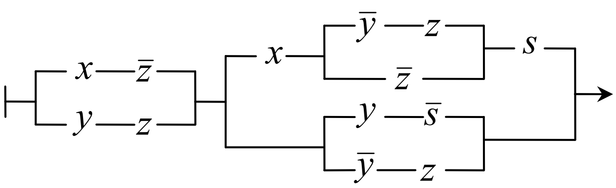
6)



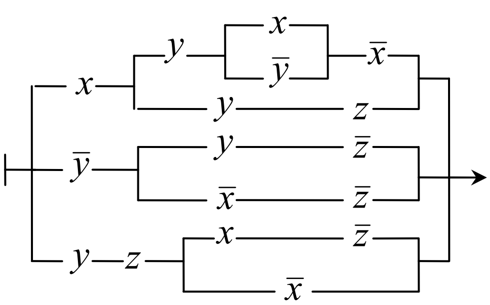
7)



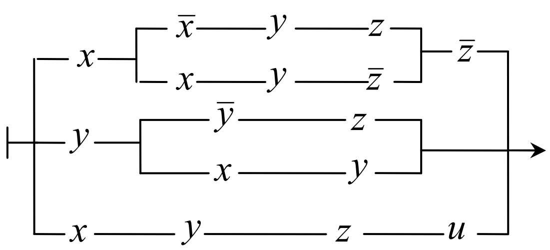
8)



9)



10)



III. 1) Нужно, чтобы включение света в комнате осуществлялось с помощью трех различных переключателей так, чтобы нажатие на любой из них приводило к включению света, если он перед этим был включен, и к его выключению, если он включен. Постройте простую цепь, удовлетворяющую этому условию.

2) Пусть каждый из пяти членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходил бы тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за».

3) Пусть каждый из пяти членов комитета голосует «за», нажимая кнопку. Постройте простейшую цепь, через которую ток проходил бы тогда и только тогда, когда большинство членов комитета голосует «за», но только при том дополнительном условии, что за него голосует председатель комитета.

4) Построить контактные и логические схемы, реализующие функции от четырех аргументов, которая равна I тогда и только тогда, когда число аргументов, принимающих значение I, более трех или не более одного.

5) Построить контактные и логические схемы, реализующие функцию от трех аргументов, которая равна I тогда и только тогда, когда один или два аргумента равна I.

6) Построить контактные и логические схемы, реализующие функцию от трех переменных, которая равна I тогда и только тогда, когда один из аргументов принимает значение I.

7) Составьте электронную схему дешифратора, переводящую двоичный код в десятичные цифры.

8) Составить схему-шифратор, переводящую десятичные цифры в соответствующие двоичные коды.

Вопросы для самоконтроля

1 Контактные схемы.

2 Логические схемы.

3 Задача анализа и синтеза контактных схем.

Литература

1 Столяр, А.А. Математика [Текст]:учебное пособие для студентов факультетов по подготовке учителей начальных классов педагогических вузов/ А.А.Столяр, М.П.Лельчук. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975. – 272с.

2 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст]: учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

<u>Тема 5</u>
ПОЛНОТА И ЗАМКНУТОСТЬ

5.1 Важнейшие замкнутые классы.

5.2 Алгортм Поста.

Основные понятия по теме

Система булевых функций $D=\{f_{1,}f_2,\dots,f_n\}$ называется *полной*, если любую булеву функцию можно представить в виде суперпозиции функций из D.

Например, следующие системы $D_1 = \{\bar{x}, xy, x \vee y\}$, $D_2 = \{\bar{x}, x \vee y\}$, $D_3 = \{\bar{x}, xy\}$ являются полными.

Множество T булевых функций называется *замкнутым классом*, если любая суперпозиция функций из T снова принадлежит T.

Всякая система M булевых функций порождает некоторый замкнутый класс. Этот класс состоит из всех булевых функций, которые можно получить суперпозициями из M. Такой класс называется *замыканием* M и обозначается $[M]$. Для замкнутого класса M следует, что $[M] = M$. Очевидно, что если M - полная система, то $[M] = P^2$.

Рассмотрим следующие классы булевых функций.

T_0 - класс булевых функций, сохраняющих константу 0, т.е. функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $f(0,0,\ldots,0) = 0$.

T_1 - класс булевых функций, сохраняющих константу 1, т.е. функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для которых $f(1,1,\ldots,1) = 1$.

Булева функция $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *двойственной* к функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если она совпадает с двойственной, т.е. $f = f^*$.

S – класс всех самодвойственных функций.

Булевы функции вида $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_0$, где a_i, $i = 0,1,\ldots,n$ равны нулю или единице, называются *линейными*.

L – класс всех линейных булевых функций.

Для того, чтобы определить, является ли данная булева функция линейной или нет, ее надо представить в виде полинома Жегалкина.

Два набора $\tilde{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\tilde{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ называются *сравнимыми*, если $\alpha_i \le \beta_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Запись $\tilde{a} \prec \tilde{b}$ означает, что набор $\tilde{a}$ предшествует набору $\tilde{b}$.

Булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *монотонной*, если для любых наборов $\widetilde{a}$ и $\widetilde{b}$ таких, что $\widetilde{a} \prec \widetilde{b}$, имеет место неравенство $f(\widetilde{a}) \le f(\widetilde{b})$.

M – класс монотонных функций.

Теорема (о функциональной полноте) Для того, чтобы система булевых функций была полной, необходимо и достаточно, чтобы она целиком не содержалась ни в одном из пяти классов T_0, T_1, S, L, M.

В тех задачах, где требуется выяснить, является ли данная система булевых функций $D = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ полной, мы будем составлять таблицы, которые называются *таблицами Поста.*

	T_0	T_1	S	L	M
f_1					
f_2					
…					
f_{n-1}					
f_n					

В клетках данной таблицы мы будем писать плюс или минус, в зависимости от того, входит функция, стоящая в данной строке в класс, стоящий в данном столбце, или не входит. Используя теорему о полноте, мы получаем, что для полноты данной системы булевых функций необходимо и достаточно, чтобы в каждом столбце стоял хотя бы один минус.

<u>Пример 1</u> Выяснить, является ли функция $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \overline{x}\overline{y}\overline{z}$ линейной.

Найдем полином Жегалкина для данной функции.

$x\bar{y} \vee \bar{x}y = x + y$,

$$
\begin{aligned}
&xy \vee \bar{x}\bar{y} = \overline{\overline{xy}\,\overline{\bar{x}\bar{y}}} = (xy+1)((x+1)(y+1))+1 = \\
&= (xy+1)(xy+x+y)+1 =
\end{aligned}
$$

$$
= xy + xy + xy + xy + x + y + 1 = x + y + 1 = \overline{x+y}
$$

$$
\begin{aligned}
&xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z} = z(x\bar{y} \vee \bar{x}y) \vee \bar{z}(xy \vee \bar{x}\bar{y}) = \\
&= z(x+y) \vee \bar{z}\overline{(x+y)} = x + y + z + 1
\end{aligned}
$$

Следовательно, данная функция линейна.

<u>Пример 2</u> Какие из указанных функций являются монотонными:

а) $xy \vee xz \vee \bar{x}z$ б) $x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$

а) Упростим формулу $xy \vee xz \vee \bar{x}z = xy \vee z(x \vee \bar{x}) = xy \vee z$. Эта функция равна нулю на наборах (0,0,0), (0,1,0), (1,0,0). Все оставшиеся наборы, исключая (0,0,1) содержат не менее двух единиц, а значит, они могут быть только больше. Набор (0,0,1) $\succ$ (0,0,0), а с остальными двумя он несравним. Значит, рассматриваемая функция монотонна.

б) Функция немонотонна, т.к. (0,0) $\prec$ (1,0), но $0 \Rightarrow (0 \Rightarrow 0) = 1 \succ 1 \Rightarrow (1 \Rightarrow 0) = 0$.

<u>Пример 3</u> Является ли функция $xy \vee yz \vee xz$ самодвойственной?

Найдем двойственную функцию к данной

$$
\begin{aligned}
&\overline{\bar{x}\bar{y} \vee \bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{z}} = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) = (y \vee xz)(x \vee z) = \\
&= xy \vee yz \vee xz \vee xz = xy \vee yz \vee xz
\end{aligned}
$$

Следовательно, данная функция самодвойственная.

<u>Пример 4</u> Выяснить, являются ли данные системы булевых функций полными

а) $D_1 = \{x \mid y\}$; б) $D_2 = \{x + y + z, xy, 0, 1\}$; в) $D_3 = \{xy \vee yz \vee xz, \bar{x}\}$

а) $x \mid y = \bar{x} \vee \bar{y}$. Ясно, что $x \mid y \notin T_0$, $x \mid y \in T_1$. Так как $\overline{\bar{x} \mid \bar{y}} = \overline{x \vee y} \neq x \mid y$, то $x \mid y \notin S$. Найдем полином Жегалкина для $x \mid y = \bar{x} \vee \bar{y} = \overline{xy} = xy + 1$. Следовательно, $x \mid y \notin L$. Так как (0,0) $\prec$ (1,1), но $1 = \bar{0} \vee \bar{0} > \bar{1} \vee \bar{1} = 0$, то $x \mid y \notin M$. Таблица Поста для системы D_1 имеет вид.

	T_0	T_1	S	L	M
$x \mid y$	–	–	–	–	–

Итак, D_1 - полная система.

б)

	T_0	T_1	S	L	M
0	+	–	–	+	+
1	–	+	–	+	+
xy	+	+	–	–	+
$x+y+z$	+	+	+	+	–

Функция $x+y+z$ самодвойственная, так как

$\overline{\overline{x}+\overline{y}+\overline{z}} = x+y+z+1+1+1+1 = x+y+z$

Функция $x+y+z$ немонотонная, так как (0,0,1) $\prec$ (0,1,1), но 1=0+0+1>0+1+1=0.

Система D_2 - полная система.

в)

в)	T_0	T_1	S	L	M
$\overline{x}$	–	–	+	+	–
$xy \vee yz \vee xz$	+	+	+	–	–

Функция $xy \vee yz \vee xz$ самодвойственная, так как

$$\overline{\overline{xy} \vee \overline{yz} \vee \overline{xz}} = (x \vee y)(y \vee z)(x \vee z) =$$
$$= (y \vee xz)(x \vee z) = xy \vee yz \vee xz$$

Итак, система D_3 целиком принадлежит классу S. Следовательно, по теореме о полноте D_3 не является полной системой.

Лабораторной работе №5

I. Какие из указанных систем функций являются замкнутыми классами?

1) Линейная функция;

2) самодвойственные функции;

3) монотонные функции;

4) монотонно убывающие функции;

5) функции, сохраняющие нуль;

6) функции, сохраняющие единицу;

7) функции, сохраняющие и нуль, и единицу;

8) функции, сохраняющие нуль, но не сохраняющие единицу;

9) функции от одной переменной;

10) функции от двух переменных.

II. Являются ли следующие функции линейными?

1) $\left(xy \vee \overline{xy}\right) + z$

2) $\bar{x}y \vee \bar{y}z \vee \bar{z}u \vee \bar{u}x$

3) $(x \Rightarrow y)(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow z$

4) $xy \vee yz \vee xz$

5) $xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \overline{xyz}$

6) $f(x, y, z) = (11101000)$

7) $f(x, y, z) = (01111110)$

8) $f(x, y, z) = (10011001)$

9) $f(x, y, z) = (01101001)$

10) $x(y \Leftrightarrow z) \vee x(y + z)$

III. Являются ли следующие функции монотонными?

1) $f(x, y, z) = (00110111)$

2) $f(x, y, z) = (01100111)$

3) $x \Rightarrow (y \Rightarrow x)$

4) $x \Rightarrow (x \Rightarrow y)$

5) $xy(x+y)$

6) $xy + yz + xz + z$

7) $xy \vee yz \vee xz$

8) $xy \vee xz \vee \bar{x}z$

9) $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$

10) $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z(x+y)$

IV. Являются ли следующие функции самодвойственными?

1) $x + y + z$

2) $xy \vee xz \vee yz$

3) $\overline{(x \Rightarrow y) \Rightarrow xz} \Rightarrow (y \Rightarrow z)$

4) $f(x, y, z) = (01010101)$

5) $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z})u \vee \bar{x}y\bar{z}$

6) $(x \downarrow y) \Rightarrow (x+z)$

7) $f(x, y, z) = (00111001)$

8) $xy \vee xz \vee yt \vee zt$

9) $(x+y) \Rightarrow (x \mid z)$

10) $f(x, y, z) = (00001111)$

V. Являются ли следующие системы функций полными?

1) $\{x \Rightarrow y, x \Rightarrow \bar{y}z\}$

2) $\{x \cdot \bar{y}, x \Leftrightarrow yz\}$

3) $\{0, 1, x(y \Leftrightarrow z) \vee x(y+z)\}$

4) $\{x\bar{y}, \bar{x} \Leftrightarrow yz\}$

5) $\{0, 1, xy, x + y + z\}$

6) $\{(0010), (1010110111110011)\}$

7) $\{xy \vee y\bar{z} \vee \bar{z}x, x + y + z\}$

8) $\{(01101001),(10001101),(00011100)\}$

9) $\{(0001101),(10101010),(00110011)\}$

10) $\{(xy \vee xz \vee yz), x \Rightarrow y, \bar{x}\}$

Вопросы для самоконтроля

1 Полные системы булевых функций.

2 Замыкание.

3 Замкнутые классы.

4 Классы T_0, T_1, S, L, M .

5 Теорема о полноте.

Литература

1 Карпов, В.Г. Математическая логика и дискретная математика [Текст] : учебное пособие для студентов университетов/ В.Г.Карпов, В.А.Мощенский. – Мн.: Вышэйшая школа, 1977. – 255с.

2 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

Тема 6
АЛГЕБРА ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

6. 1 Понятие формулы алгебры логики предикатов.

6.2 Законы алгебры логики предикатов.

Основные понятия по теме

Напомним, что под высказыванием мы понимаем предложение, о котором можно сказать одно из двух: истинно оно или ложно. Понятие предиката обобщает понятие высказывания. Теория предикатов представляет собой более тонкий инструмент, по сравнению с теорией высказываний. В настоящей главе рассматривается основные положения теории алгебры предикатов.

Определение 1 n-местным предикатом, определённым на множествах M_1, $M_2,\dots,M_n$, называется предложение, содержащее n переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ превращающееся в высказывание при подстановки вместо этих переменных любых конкретных элементов из множеств M_1, $M_2,\dots,M_n$ соответственно.

Обозначать n-местные предикаты будем $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$, причём переменные $x_1,x_2,\dots,x_n$ называются предметными.

Всякий n-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ определённый на множествах M_1, $M_2,\dots,M_n$ есть функция от n аргументов, заданная на указанных множествах и принимающая значение 0(ложно) или 1(истинно).

Будем говорить, что n-местный предикат $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ задан на множестве M, если $x_1,x_2,\dots,x_n$ принимают значения из M.

Примерами предикатов являются любые уравнения и неравенства из школьного курса математики.

Например, $x+y>2$, где x,у из R есть двухместный предикат заданный на множестве всех действительных чисел R.

Определение 2 Предикат $A\ (x_1,x_2,\dots,x_n)$ заданный на множествах M_1, $M_2,\dots,M_n$ называется:

1. **тождественно истинным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ любых конкретных значений из множеств M_1, $M_2,\dots,M_n$ он превращается в истинное высказывание.
2. **тождественно ложным**, если при любой подстановке вместо переменных $x_1,x_2,\dots,x_n$ любых конкретных значений из множеств M_1, $M_2,\dots,M_n$ соответственно он превращается в ложное высказывание.
3. **выполнимым**, если существует по крайней мере один набор значений переменных из M_1, $M_2,\dots,M_n$, при которых его значение истинно.

Обозначают: тождественно истинный – $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 1$; тождественно ложный – $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n) \equiv 0$.

Двухместный предикат $x^2+y^2 \geq 0$, заданный на множестве R является тождественно истинным.

Одноместный предикат $sinx>1$, заданный на множестве R является тождественно ложным.

Примером выполнимого предиката заданного на множестве R является предикат $x+y>z$.

Определение 3 Множеством истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ заданного на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ называется совокупность всех упорядоченных наборов $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_i \in M_i$, $i=1,2,\ldots,n$ при которых $A(a_1,a_2,\ldots,a_n) =1$.

Множество истинности предиката $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ мы будем обозначать N_A.

Пусть $A(x)=(x^2+3x-4=0)$ – одноместный предикат, заданный на множестве R. Ясно, что $N_A=\{1,-4\}$. Однако, если данный предикат задан на множестве натуральных чисел, то его множество истинности $N'_A=\{1\}$.

Пусть $x^2+y^2=4$ – двухместный предикат, заданный на множестве действительных чисел R. Тогда множеством истинности его являются множества всех таких пар действительных чисел, которые являются координатами точек плоскости, лежащих на окружности с центром в начале координат и радиусом 2.

Непосредственно из определения 2 следует справедливость следующего утверждения.

Пусть $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n-местный предикат, заданный на множествах $M_1,\ M_2,\ldots,M_n$ тогда справедливы следующие утверждения :

1. $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является тождественно истинным тогда и только тогда, когда $N_A= M_1\times M_2\times\ldots\times M_n$;

2. $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является тождественно ложным тогда и только тогда, когда $N_A=\varnothing$;

3. $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является выполнимым тогда и только тогда, когда $N_A\neq\varnothing$;

Определение 4 Два n-местных предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ заданных на одних и тех же множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называются равносильными, если для любых наборов переменных $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, где $a_i\in M_i$, $i=1,2,\ldots,n$ они принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из данного определения следует, что предикаты $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равносильны тогда и только тогда, когда их множества истинности совпадают, то есть $N_A=N_B$.

Тот факт, что предикаты $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равносильны будем обозначать так: $A=B$.

Определение 5 Предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённый на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется следствием предиката $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённом над теми же множествами, если он принимает истинные значения на всех тех наборах значений переменных, на которых истинно значение предиката $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

Другими словами можно сказать, что предикат $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ является следствием предиката $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ тогда и только тогда, когда $N_B\subseteq N_A$.

Пусть $A_1(x)=x\,\vdots\,2$ (x делится на 2) $A_2(x)=x\,\vdots\,4$ (x делится на 4) два одноместных предиката заданных на множестве натуральных чисел. Ясно, что предикат A_1 является следствием предиката A_2.

Так как любой предикат при фиксированных значениях переменных превращается в высказывание, то над ними можно проделывать те же логические операции, что и над высказываниями.

Определение 6 Отрицанием n-местного предиката $A\ (x_1,x_2,\ldots,x_n)$ определённого на множествах $M_1, M_2,\ldots,M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$, значение которого истинно при всех тех значениях переменных, при которых значение предиката ложно.

Например, отрицанием двухместного предиката *x+y>2*, определённого на множестве *R* является предикат *x+y<2*, определённый на том же множестве *R*.

Теорема 1 *Пусть* $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *- n-местный предикат, определённый на множествах M_1, M_2,...,M_n. Тогда справедливо следующее тождество:*

$$N_{\bar{A}} = (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n) \setminus N_A .$$

Доказательство Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - произвольный набор переменных из $N_{\bar{A}}$. Тогда $\overline{A(x_1, x_2, \ldots, x_n)}$ *=1*. Это возможно только тогда, когда $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *=0*. А это значит, что

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in (M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n) \setminus N_A .$$

Отсюда следует справедливость указанного тождества. Непосредственно из данной теоремы следует:

Следствие Отрицание предиката будет тождественно истинным тогда и только тогда, когда исходный предикат тождественно ложен.

Определение 7 Конъюкцией *n*-местных предикатов $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определённых на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется n-местный предикат, определённый на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборах переменных, при которых истинно значение исходных предикатов.

Теорема 2 *Пусть* $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *и* $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *два n-местных предиката определённые на множествах* $M_1, M_2, \ldots, M_n$. *Тогда справедливо следующее тождество:* $N_{A \bullet B} = N_A \bigcap N_B$.

Доказательство Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ - произвольный набор переменных из $N_{A \bullet B}$, тогда $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \cdot B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Это возможно только тогда, когда одновременно $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. А это значит, что $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in N_A \bigcap N_B$.Теорема доказана.

Непосредственно из данной теоремы следует:

Следствие Конъюнкция двух предикатов тождественно истинна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно истинны.

Теорема 2 используется в школьном курсе математики при решении систем уравнений и неравенств. Например, требуется решить систему неравенств $|x| < 5$, $x \geq 3$. Для этого нужно найти множество истинности предиката$(|x| < 5) \cdot (x \geq 3)$, определённого на множестве R.Используя теорему 2 получаем:

$$N_{(|X|<5)\bullet(X\geq 3)} = N_{|X|<5} \bigcap N_{X\geq 3} = [-5,5] \bigcap [3,+\infty) = [3,5].$$

Определение 8 Дизъюнкцией n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$ называется n-местный предикат, определенный на этих множествах, обозначенный

$A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого истинно при тех и только тех наборов переменных, при которых истинно значение по меньшей мере одного из исходных предикатов.

Теорема 3 *Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ два n-местных предиката, определенные на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Тогда справедливо следующее тождество $N_{A \vee B} = N_A \cup N_B$.*

Доказательство Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – произвольный набор переменных из $N_{A \vee B}$. Тогда $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \vee B(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$. Это возможно только тогда, когда или $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1$ или $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)=1$. А это значит, что $(a_1\ a_2, \ldots, a_n) \in N_A \cup N_B$. Теорема доказана.

Следствие Дизъюнкция двух предикатов тождественно ложна тогда и только тогда, когда оба данных предиката тождественно ложны.

Теорема 4 *Пусть $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $C(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – n-местные предикаты, определенные на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, тогда справедливы следующие равносильности:*

$$A\cdot B=B\cdot A,\ AVB=BVA,\ A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C,\ AV(BVC)=(AVB)VC,$$

$$A\cdot(BVC)=A\cdot BVA\cdot C,\ AVB\cdot C=(AVB)\cdot(AVC),\ \overline{A\cdot B}=\overline{A}\,V\,\overline{B},\ \overline{A\,V\,B}=\overline{A}\cdot\overline{B}.$$

Доказательство Докажем справедливость следующей равносильности $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\,V\,\overline{B}$. Для этого нужно доказать справедливость следующего тождества $N_{\overline{A\cdot B}}=N_{\overline{A}V\overline{B}}$. Действительно, пусть $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ – произвольный набор переменных из $N_{\overline{A\cdot B}}$. Тогда $\overline{A(a_1,a_2,\ldots,a_n)\cdot B(a_1,a_2,\ldots,a_n)}=1$. Отсюда получаем, что $A(a_1,a_2,\ldots,a_n)\ B(a_1,a_2,\ldots,a_n)=0$. Это возможно только в том случае, когда либо $A(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$, либо $B(a_1, a_2, \ldots, a_n)=0$. А это значит, что либо $\overline{A(a_1,a_2,\ldots,a_n)}=1$, либо $\overline{B(a_1,a_2,\ldots,a_n)}=1$. Следовательно, $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in N_{\overline{A}V\overline{B}}$. Итак, $N_{\overline{A\cdot B}}=N_{\overline{A}V\overline{B}}$. Отсюда $\overline{A\cdot B}=\overline{A}\,V\,\overline{B}$. Аналогичным образом можно доказать справедливость других равносильностей. Теорема доказана.

Определение 9 Пусть $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ и $B(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ n-местные предикаты на множествах $M_1,M_2,\ldots,M_n$. Их импликацией называется предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Rightarrow B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, значение которого ложно только при тех наборах переменных, при которых значение предиката A истинно, а B – ложно. Предикат A называется посылкой и B – заключение.

Непосредственно из определения следует, что импликация двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда ее заключение является следствием посылки.

Определение 10 Эквивалентность двух n-местных предикатов $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $B(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определенных на множествах $M_1, M_2, \ldots, M_n$, называется n-местный предикат, определенный на тех же множествах, обозначаемый $A(x_1, x_2, \dots, x_n) <=> B(x_1, x_2, \dots, x_n)$, значение которого истинно при всех тех наборах переменных, при которых предикаты A и B принимают одинаковые логические значения.

Непосредственно из определения 10 следует, что эквивалентность двух предикатов, зависящих от одних и тех же переменных, есть тождественно истинный предикат тогда и только тогда, когда они равносильны.

В следующей теореме доказаны важные равносильности, выражающие одни логические операции над предикатами через другие.

Теорема 5 *Пусть* $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *и* $B(x_1, x_2, \dots, x_n)$ *n-местные предикаты, определенные на множествах* $M_1, M_2, \dots, M_n$. *Тогда справедливы следующие равносильности:*

$A=>B=\overline{A} \vee B,\ A \cdot B=\overline{\overline{A} \vee \overline{B}},\ A<=>B=(A=>B)\cdot(B=>A).$

Доказательство Докажем справедливость следующей равносильности $A<=>B=(A=>B)\cdot(B=>A)$. Для этого нужно доказать справедливость следующего тождества $N_{A<=>B}=N_{(A=>B)\cdot(B=>A)}$. Пусть $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ – произвольный набор из $N_{A<=>B}$. Отсюда следует, что $A(a_1, a_2, \dots, a_n)<=>B(a_1\ a_2, \dots$ $\dots, a_n)=1$. Это возможно только в том случае, когда либо значения $A(a_1, a_2, \dots$ $\dots, a_n)$ и $B(a_1, a_2, \dots, a_n)$ истинны, либо ложны одновременно. Но в любом из этих случаев значение $(A(a_1, a_2, \dots, a_n)=>B(a_1, a_2, \dots, a_n))\ (B(a_1, a_2, \dots,$ $\dots a_n)=>A(a_1, a_2, \dots, a_n))=1$, т.е. $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in N_{(A=>B)\cdot(B=>A)}$. Итак, требуемое тождество доказано. Отсюда следует справедливость отмеченной выше равносильности. Остальные равносильности доказываются аналогично. Теорема доказана.

Операции отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквивалентность определяются аналогично как для предикатов, так и для высказываний. Однако в теории предикатов существуют операции, для которых нет аналогов в теории высказываний. Такими операциями над предикатами являются две кванторные операции – квантор общности и квантор существования. Известно, что если в одноместном предикате зафиксировать значение переменной, то мы получим высказывание.

Имеется еще один способ. Он основан на применении к предикату операций связывания квантором общности или квантором существования. Такие операции ставят в соответствие одноместному предикату высказывание, значение которого зависит от строения исходного предиката.

Определение 11 Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве М. Обозначим через $\forall x\ A(x)$ высказывание, которое читается: «для всякого x из M справедливо $A(x)$», данное высказывание истинно только в том случае, когда предикат $A(x)$ тождественно истинный.

Символ $\forall x$ называется квантором общности по переменной x.

Например, пусть $A(x)=(x^2 \geq 0)$ определенный на множестве R. Тогда $\forall x\,(x^2 \geq 0)$ – истинное высказывание, которое читается: «квадрат любого действительно числа неотрицателен». Пусть $A(x)=(x>2)$. Тогда $\forall x(x > 2)$ – ложное высказывание, которое читается: «любое действительное число больше 2».

Следующая теорема показывает, что квантор общности можно рассматривать как обобщение конъюнкции.

Теорема 6 *Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на конечном множестве $M=\{ a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, тогда* $\forall x\ A(x) = A(a_1) \cdot A(a_2) \cdot \ldots \cdot A(a_n)$.

Доказательство Пусть $\forall x\ A(x) = 1$, тогда $A(x) \equiv 1$. Отсюда $A(a_i)=1$ для любого $a_i \in M$. Но тогда $A(a_1) \cdot A(a_2) \cdot \ldots \cdot A(a_n)=1$. Пусть $\forall x\ A(x) = 0$, тогда

$A(x) \neq 1$. А это значит, что существует a_i из M, что $A(a_i)=0$. Но тогда $A(a_1) \cdot A(a_2) \cdot \ldots \cdot A(a_n)=0$. Теорема доказана.

Квантор общности можно применять и к многоместным предикатам. Однократное применение квантора к одной из n переменных n-местного предиката порождает $(n\text{-}1)$ – местный предикат.

Пусть, например, мы имеем двухместный предикат $A(x,y)=(x>y)$, определенный на множестве R. Тогда $\forall x\ (x>y)$ задает одноместный предикат $B(y)$, зависящий от переменной у. Определим тип этого предиката. Возьмем произвольное действительное число y_0. Ясно $B(y_0)= \forall x(x>y_0)=0$. Следовательно, $B(y)$ – тождественно ложный предикат.

Заметим, что к $(n\text{-}1)$-местному предикату $\forall x_1\, A(x_1,x_2, \ldots ,x_n)$ зависящему от переменных $x_1, x_2,x_3, \ldots ,x_n$ можно снова применять операцию связывание квантором общности по одной из свободных переменных. В результате получится $(n\text{-}2)$-местный предикат и т.д.

Пусть, например, мы имеем двухместный предикат $A(x,y)=(x+y>2)$, определенный на R. Тогда $\forall x\forall y\ (x+y>2)$ – ложное высказывание, которое читается: «сумма любых двух действительных чисел больше двух».

Определение 12 Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве M. Обозначим $\exists x\ A(x)$ – высказывание, которое читается: «существует x из M, что справедливо $A(x)$», данное высказывание ложно только в том случае, когда предикат $A(x)$ тождественно ложный.

Символ $\exists x$ называют квантором существования по переменной x.

Например, пусть $A(x)=(x^2<0)$ определен на R. Тогда $\exists x\ (x^2<0)$ – ложное высказывание, которое читается: «существует действительное число, квадрат которого меньше 0».

Следующая теорема показывает, что квантор существования можно рассматривать как обобщение дизъюнкции.

Теорема 7 *Пусть $A(x)$ – одноместный предикат, определенный на конечном множестве $M=\{a_1,a_2, \ldots ,a_n\}$. Тогда $\exists x\ A(x)=A(a_1)VA(a_2)\ V\ldots VA(a_n)$.*

Доказательство Пусть $\exists x\ A(x)=0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)$ – тождественно ложный предикат, а значит $A(a_i)=0$ для любого $a_i \in M$, но тогда $A(a_1)VA(a_2)\ V\ldots VA(a_n)=0$.Пусть $\forall x\ \ A(x)=1$. Тогда $A(x)$ – не тождественно ложный предикат. А это значит, что найдется значение a_i из M, что $A(a_i)=1$. Но тогда $A(a_1)\vee A(a_2)\vee \ldots \vee A(a_n)=1$. Теорема доказана.

Квантор существования можно применять к многомерным предикатам. Однократное применение квантора к одной из n переменных a-мерного предиката порождает $(n-1)$-мерный предикат.

Пусть, например, мы имеем двухместный предикат $A(x,y)=(x>y)$ определённый на множестве R. Тогда $\exists x(x>y)$ задает одноместный предикат $B(y)$, зависящий от переменной y. Данный предикат будет тождественно истинным. Действительно, пусть y_0 – произвольное фиксированное действительное число. Тогда $B(y_0)= \exists x(x>y_0)=1$.

Заметим, что если в многомерном предикате все переменные связаны кванторами, то он будет высказыванием.

Пусть $A(x,y)=(x+y>1)$ двухместный предикат определённый на множестве R.

Тогда из него связыванием переменных x и y можно получить восемь высказываний:

1. $\forall x\forall y(x+y>2)$ – “Для всяких действительных чисел x и y их сумма больше двух”.
2. $\forall y\forall x(x+y>2)$ – “Для всяких действительных чисел y и x их сумма больше двух”.
3. $\exists x\exists y(x+y>2)$ – “Существуют действительные числа x и y, сумма которых больше двух”.
4. $\exists y\exists x(x+y>2)$ – “Существуют действительные числа y и x, сумма которых больше двух”.
5. $\forall x\exists y(x+y>2)$ – “Для всякого действительного числа x существует действительное число у, что их сумма больше двух”.
6. $\forall y\exists x(x+y>2)$ – “Для всякого действительного числа y существует действительное число x, что их сумма больше двух”.

7. $\exists x \forall y\ (x+y>2)$ – “Существует действительное число x, что для всякого действительного числа y их сумма больше двух ”.
8. $x\ (x+y>2)$ – “Существует действительное число y, что для всякого действительного числа x их сумма больше двух ”.

Нужно заметить, что высказывания 1 и 2 оба ложны и имеют один и тот же смысл; высказывания 3 и 4 оба истины и имеют один и тот же смысл. Как видно, изменение порядка одноименных кванторов не влияет на смысл и значение истинности высказывания. Высказывание 5 истинно, а высказывание 8 ложно.

Высказывание 7 ложно, а высказывание 6 истинно. Как видно, изменение порядков разноименных кванторов приводит к изменению смысла и, возможно, значения истинности высказывания.

Понятие формулы алгебры логики предикатов определим индуктивно.

Вначале задается алфавит символов, из которых будут составляться формулы.

1. Предикатные переменные: $x, y, z, x_i, y_i, z_i\ (i \in N)$.

2. Нульместные предикатные переменные: $A, B, C, A_i, B_i, C_i\ (i \in N)$.

3. n-мерные $(n>=1)$ предикатные переменные:

$$A(\ldots),\ B(\ldots),\ A_i(\ldots),\ B_i(\ldots) \quad (i \in N)$$

4. Символы логических операций: $-$, $\cdot$, $\vee$,$\Rightarrow$,$\Leftrightarrow$

5. Кванторы: $\forall$, $\exists$

Определение 13

1. Каждая нульместная предикатная переменная есть формула.

2. Если $A(\ldots)$-n-местная предикатная переменная, то $A(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ есть формула, в которой все предикатные переменные $x_1,x_2,\ldots,x_n$ свободны.

3. Если F – формула, то $\overline{F}$ - также формула. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\overline{F}$ те и только те, которые являются свободными (связанными в F).

4. Если F_1 и F_2 – формулы, если предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения $F_1 F_2$, $F_1 \vee F_2$, $F_1 \Rightarrow F_2$, $F_1 \Leftrightarrow F_2$ так же являются формулами.

5. Если F – формулы и x – предметные переменные, входящие в F свободны, то выражения $\forall xF$ и $\exists xF$ так же являются формулами, в которых переменная *x* связанная и все остальные предметные переменные, входящие в формулу *F* свободно или связано остаются и в новых формулах соответственно такими же.

6. Других формул логики предикатов, кроме получающихся согласно пунктам 1-5, нет.

Например, *A(x,y) B(z)* – элементарные формулы, и

$\forall x\, A(x,y)$, $(\forall xB(x)) \vee$; $\vee(\exists x\, A(x,y))$, $\forall x\, A(x,y) \Rightarrow B(y)$ – составные формулы.

Формулы, в которых все переменные связаны, называются замкнутыми, а формулы содержащие свободные предметные переменные – открытыми.

Примерами замкнутых формул являются

$$\forall x \forall y\, A(x,y),\ \forall x\, B(x) \Rightarrow \exists y\, A(y).$$

Если в формулу алгебры логики вместо каждой предикатной переменной подставить конкретный предикат, определенный на множестве *M*, то формула превращается в конкретный предикат, определенный на *M*. Причем, если формула замкнута, то после такой подстановки мы получаем высказывание. Если в исходной формуле были свободные переменные, то после такой подстановки мы получаем конкретный предикат от таких переменных. Если теперь вместо таких переменных подставить их конкретное значение, то мы опять получим высказывание.

Такое превращение формулы алгебры логики в высказывание называется интерпретацией этой формулы на множестве *M*.

Рассмотрим формулу $\forall x\, A(x,y) \Rightarrow \exists x\, A(x,y)$. В качестве *M* возьмем множество всех действительных чисел. В данную формулу вместо предикатной переменной $A(x,y)$ подставим конкретный предикат $x+y>2$ определенный на R. Получаем

$\forall x(x+y>2) \Rightarrow \exists x(x+y>2)$ предикат, зависящий от переменной у. Вместо у подставим любое конкретное значение y_0 из F.

Получаем высказывание $\forall x(x+y_0>2) \Rightarrow \exists x(x+y_0>2)$, так как

$\forall x(x+y_0>2)=0$, $\exists x(x+y_0>2)=1$.

Ясно, что предикат $\forall x(x+y>2) \Rightarrow \exists x(x+y_0>2)$ – тождественно истинный предикат.

Определение 14 Формула алгебры логики предикатов называется выполнимой на множестве M, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, определенных на этом множестве, она превращается в выполнимый предикат. Другими словами, формула выполнима на М, если существует истинная ее интерпретация на M.

Например, формула $\exists xA(x) \Rightarrow B(y)$ выполнима на множестве R. Действительно, подставляя в данную формулу вместо предикатных переменных конкретные предикаты $(x>2),(y<3)$ получаем предикат $\exists x(x>2) \Rightarrow (y<3)$ зависящий от y. Данный предикат выполнимый. Действительно, пусть $y=2$. Ясно, что высказывание $\exists x(x>2) \Rightarrow (2<3)$ истинно.

Определение 15 Формула алгебры логики предикатов называется тождественно истинной (тождественно ложной) на множестве M, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Определение 16 Формула алгебры логики предикатов называется тавтологией (противоречием), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Покажем, что формула $\forall xA(x) \Rightarrow \exists xA(x)$ является тавтологией. Пусть $A(x)$ – любой конкретный предикат, определенный на любом множестве M. Покажем, что после такой подстановки в формулу мы получаем истинное высказывание.

Предположим противное $\forall xA(x) \Rightarrow \exists xA(x)=0$. Тогда $\forall xA(x)=1$ и $\exists xA(x)=0$.

Отсюда следует, что $A(x)\equiv 1$ и $A(x)\equiv 0$ одновременно, что невозможно.

Покажем, что формула $\overline{A(x)}\bullet(\forall yA(y))$ является противоречием. Предположим что это не так. Тогда найдется конкретный предикат $A(x)$ определенный на конкретном множестве М, после подстановки которого в исходную формулу мы получаем выполнимый предикат на множестве M. А это значит, что найти значение а из M, что $\overline{A(a)}\bullet(\forall yA(y))=1$. Но тогда $\overline{A(a)}=1$ и $\forall yA(y)=1$. Отсюда следует, что $A(a)=0$ и $A(y)$ – тождественно истинный предикат на M, одновременно. Получили противоречие.

Нахождение тавтологий является одной из важнейших задач логики предикатов. В алгебре высказываний существует алгоритм, позволяющий выяснить, является ли формула алгебры высказываний тождественно истинной или нет. Для этого нужно составить таблицу истинности формулы. Если последний столбец состоит только из единиц, то формула тождественно истинна. Аналогичная проблема о существовании такого алгоритма возникает и для формул алгебры логики предикатов. В 1936 году американским математиком А. Чёрчем было доказано, что такого алгоритма не существует. Каждая форма подлежит изучению индивидуальным методом на тождественную истинность. Тем не менее, для некоторых частных видов формул данная проблема допускает решение, в частности, для формул алгебры логики предикатов определённых на конечных множествах.

Действительно, пусть формула алгебры логики предикатов заданна на конечном множестве. Тогда вместо её предикатных переменных могут подставляться конкретные предикаты, определённые на этом множестве. Согласно теоремам 6 и 7 операции квантификации на конечном множестве сводятся к конъюнкции и дизъюнкции. Следовательно, задача о том является ли формула тавтологией, сводится к аналогичной задаче для алгебры высказываний, которая эффективно разрешима.

Определение 17 Две формулы F_1 и F_2 алгебры логики предикатов называются равносильными на множестве *M*, если при любой подстановке в эти формулы вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, определённых на множестве *M*, формулы превращаются в равносильные предикаты. Если две формулы равносильны на любых множествах, то их будем называть просто равносильными и обозначать $F_1 = F_2$.

В следующих теоремах приводятся наиболее важные равносильные формулы алгебры логики предикатов.

Теорема 8 (законы де Моргана для кванторов) *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:*

1) $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$;

2) $\overline{\exists x A(x)} = \forall x \overline{A(x)}$;

Доказательство 1) Пусть *A(x)* – произвольный конкретный одноместный предикат, определённый на произвольном множестве *M*. Тогда $\overline{\forall x A(x)}$ и $\exists x \overline{A(x)}$ - высказывания.

Пусть $\overline{\forall x A(x)}$=1. Тогда $\forall x A(x)$=0. Отсюда следует, что $A(x) \not\equiv 1$. А это значит, что $\overline{A(x)} \not\equiv 0$. Теперь, согласно определению 12 $\exists x \overline{A(x)}$=1.

Пусть $\overline{\forall x A(x)}$=0. Тогда $\forall x A(x)$=1. Отсюда следует, что $A(x) \equiv 1$. А это значит, что $\overline{A(x)} \equiv 0$. Теперь, согласно определению 12 $\exists x \overline{A(x)}$=0.

Доказательство определения 2) приводиться аналогично.

Следствие Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны: $\forall x A(x) = \overline{\exists x \overline{A(x)}}$

$$\exists x A(x) = \overline{\forall x \overline{A(x)}}$$

Действительно, согласно теореме 8 и закону двойного отрицания получаем $\overline{\exists x \overline{A(x)}} = \forall x \overline{\overline{A(x)}} = \forall x A(x)$.

Теорема 9 (законы пронесения кванторов через конъюкцию) *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны :*

1) $\forall$ x($A(x) \cdot B(x)$)=($\forall xA(x)$)$\cdot$($\forall xB(x)$);

2) $\exists x(A(x)\cdot P)=(\exists xA(x))\cdot P$.

Доказательство 1) Пусть $A(x),B(x)$ – произвольные одноместные предикаты, определённые на произвольном множестве M.

Пусть $\forall x(A(x)\cdot B(x))=1$. Тогда $A(x)\cdot B(x)\equiv 1$. Согласно следствию из теоремы 2 $A(x)\equiv 1$ и $B(x)\equiv 1$ одновременно. Согласно определению 11 $\forall xA(x)=1$ и $\forall xB(x)=1$. А это значит, что $(\forall xA(x))\cdot(\forall xB(x))=1$.

Пусть теперь $\forall x(A(x)\cdot B(x))=0$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\cdot B(x) \not\equiv 1$. Согласно следствию из теоремы 2 либо $A(x) \not\equiv 1$, либо $B(x) \not\equiv 1$. Но тогда согласно определению 11 либо $\forall xA(x)=0$, либо $\forall xB(x)=0$. А это значит, что $(\forall xA(x))\cdot(\forall xB(x))=0$.

2) Пусть $A(x)$ – произвольный конкретный одноместный предикат, определённый на множестве M, а P – произвольное конкретное высказывание.

Пусть $\exists x(A(x)\cdot P)=1$. Согласно определению 12 $A(x)\cdot P\not\equiv 0$. Отсюда нетрудно заметить, что $A(x) \not\equiv 0$ и $P=1$. Тогда согласно определению 12 $\exists xA(x)=1$. А это значит, что $(\exists xA(x))\cdot P=1$.

Пусть $\exists x(A(x)\cdot P)=0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)\cdot P\equiv 0$. Но тогда либо $A(x)\equiv 0$, либо $P=0$. А это значит, что либо $\exists xA(x)=0$, либо $P=0$. Отсюда следует, что $(\exists xA(x))\cdot P=0$. Теорема доказана.

Покажем, что квантор общности через дизъюнкцию проносить нельзя, т.е. $\forall x(A(x) \vee B(x)) \neq (\forall x A(x)) \vee (\forall x B(x))$.

Действительно, пусть $A(x)$ – «x нечётное число», а $B(x)$ – «x чётное число» два предиката, определённые на множестве натуральных чисел. Тогда $\forall x(A(x)\vee B(x))$ – истинное высказывание «любое натуральное число либо чётно, либо нечётно». $\forall xA(x)\vee \forall xB(x)$ - ложное высказывание «любое натуральное число нечётно или натуральное число чётно».

Теорема 9 (законы пронесения кванторов через дизъюнкцию) *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:*

1) $\exists x(A(x)\vee B(x))=(\exists xA(x))\vee(\exists xB(x))$**;**

2) $\forall x(A(x)\vee P)=(\forall xA(x))\vee P$;

Доказательство Пусть $A(x)$, $B(x)$ – произвольные конкретные одноместные предикаты, определённые на произвольном множестве M, а P – произвольное конкретное высказывание.

1) Пусть $\exists x(A(x)\vee B(x))=1$. Тогда $A(x)\vee B(x)\not\equiv 0$. Согласно следствию из теоремы 3 либо $A(x)\not\equiv 0$, либо $B(x)\not\equiv 0$ одновременно. Согласно определению 12 либо $\exists xA(x)=1$, либо $\exists xB(x)=1$. А это значит, что $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)=1$.

Пусть теперь $\exists x(A(x)\vee B(x))=0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)\vee B(x)\equiv 0$. По следствию из теоремы 3 $A(x)\equiv 0$ и $B(x)\equiv 0$. Согласно определению 12 $\exists xA(x)=0$ и $\exists xB(x)=0$. А это значит, что $\exists xA(x)\vee\exists xB(x)=0$э

2) Пусть $\forall x(A(x)\vee P)=1$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\vee P\equiv 1$. А это значит, что либо $A(x)\equiv 1$, либо $P=1$. Отсюда либо $\forall xA(x)=1$, либо $P=1$. В любом случае $\forall xA(x)\vee P=1$.

Пусть теперь $\forall x(A(x)\vee P)=0$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\vee P\not\equiv 1$. Отсюда следует, что $P=0$ и $A(x)\not\equiv 1$. Но тогда $P=0$ и $\forall xA(x)=0$. Следовательно, $\forall xA(x)\vee P=0$. Теорема доказана.

Покажем, что квантор существования через конъюкцию проносить нельзя, т. е. $\exists x(A(x)\cdot B(x))\neq(\exists xA(x))\cdot(\exists xB(x))$.

Пусть $A(x)=(x>2)$, определённый на R и $B(x)=(x<2)$, определённый на R. Тогда $\exists xA(x)=1$ и $\exists xB(x)=1$. Следовательно, $(\exists xA(x))\cdot(\exists xB(x))=1$. Очевидно, что $\exists x((x>2)\cdot(x<2))=0$.

Теорема 10 (законы пронесения кванторов через импликацию) *Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны :*

1) $\forall x(A(x)\Rightarrow P)=(\exists xA(x))\Rightarrow P$;

2) $\exists x(A(x)\Rightarrow P)=(\forall xA(x))\Rightarrow P$;

3) $\forall x(P\Rightarrow A(x))=P\Rightarrow(\forall xA(x))$;

4) $\exists x(P\Rightarrow A(x))=P\Rightarrow(\exists xA(x))$;

Доказательство Пусть $A(x)$ – произвольный конкретный одноместный предикат, определённый на множестве M, а P – произвольное конкретное высказывание.

1) Пусть $\forall x(A(x)\Rightarrow P)=1$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\Rightarrow P\equiv 1$. Отсюда нетрудно показать, что либо $A(x)\equiv 0$, либо $P=1$. А это значит, что либо $\exists xA(x)=0$, либо $P=1$. В любом из этих случаев $(\exists xA(x))\Rightarrow P=1$.

Пусть теперь $\forall x(A(x)\Rightarrow P)=0$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\Rightarrow P\not\equiv 1$. А это значит, что $A(x)\not\equiv 1$ и $P=0$. Тогда $\exists xA(x)=1$ и $P=0$. Отсюда $(\exists xA(x))\Rightarrow P=0$.

2) Пусть $\exists x(A(x)\Rightarrow P)=1$. Тогда согласно определению 11 $A(x)\Rightarrow P\not\equiv 0$. Тогда либо $P=1$, либо $A(x)\not\equiv 1$. В любом случае $(\forall xA(x))\Rightarrow P=1$.

Пусть теперь $\exists x(A(x)\Rightarrow P)=0$. Тогда согласно определению 12 $A(x)\Rightarrow P\equiv 0$. А это значит, что $A(x)\equiv 1$ и $P=0$. Отсюда $\forall xA(x)=1$ и $P=0$. А это значит, что $(\forall xA(x))\Rightarrow P=0$.

3) Пусть $\forall x(P \Rightarrow A(x)) = 1$. Тогда согласно определению 11 $P \Rightarrow A(x) \equiv 1$. Отсюда либо $P=0$, либо $A(x) \not\equiv 1$. Следовательно, либо $P=0$, либо $\forall x A(x) = 1$. В любом случае $P \Rightarrow (\forall x A(x)) = 1$.

Пусть теперь $\forall x(P \Rightarrow A(x)) = 0$. Тогда согласно определению 11 $P \Rightarrow A(x) \not\equiv 1$. Тогда $P=1$ и $A(x) \not\equiv 1$. Отсюда $P=1$ и $\forall x A(x) = 0$. Следовательно $P \Rightarrow (\forall x A(x)) = 0$.

4) Пусть $\exists x(P \Rightarrow A(x)) = 1$. Тогда согласно определению 12 $P \Rightarrow A(x) \not\equiv 0$. Отсюда либо $P=0$, либо $A(x) \not\equiv 0$. Следовательно, либо $P=0$, либо $\exists x A(x) = 1$. А это значит, что существует $P \Rightarrow (\exists x A(x)) = 1$.

Пусть теперь $\exists x(P \Rightarrow A(x)) = 0$. Тогда согласно определению 12 $P \Rightarrow A(x) \equiv 0$. Отсюда $P=1$ и $A(x) \equiv 0$. Следовательно $P=1$ и $\exists x A(x) = 0$. А это значит, что $P \Rightarrow (\exists x A(x)) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 11 (законы коммутативности для кванторов):*Следующие формулы алгебры логики предикатов равносильны:*

1) $\forall x \forall y A(x, y) = \forall y \forall x A(x, y)$;

2) $\exists x \exists y A(x, y) = \exists y \exists x A(x, y)$;

Доказательство непосредственно следуют из определения 11 и 12.

Пример 7 Доказать, что следующая формула $\forall x \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) \Rightarrow \overline{\exists x A(x) \forall x B(x)}$ является тавтологией.

Доказательство Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — произвольные конкретные предикаты, определённые на множестве M. Поставим их в исходную формулу, в результате получим высказывание. Покажем, что данное высказывание истинно.

1 способ Предположим противное. Пусть

$$\forall x \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) \Rightarrow \overline{\exists x A(x) \cdot \forall x B(x)} = 0.$$

Согласно определению импликации:

$$\begin{cases} \forall x\ \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) = 1, \\ \overline{\exists x\ A(x) \cdot \forall x\ B(x)} = 0; \end{cases}$$ Отсюда следует, что $$\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ \exists x\ A(x) \cdot \forall x\ B(x) = 1; \end{cases}$$

Тогда

$$\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ \exists x\ A(x) = 1, \\ \forall x\ B(x) = 1; \end{cases}$$ Отсюда $$\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ A(x) \equiv 0, \\ B(x) \equiv 1. \end{cases}$$ Но тогда $$\begin{cases} A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} \equiv 1, \\ A(x) \equiv 0, \\ \overline{B(x)} \equiv 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что существует такое значение x_0 из M, что

$$\begin{cases} A(x_0) \Rightarrow \overline{B(x_0)} = 1, \\ A(x_0) = 1, \\ \overline{B(x_0)} = 0. \end{cases}$$

Получим противоречие. Следовательно, искомая формула является тавтологией.

2 способ Известно, что $A(x) \Rightarrow \overline{B(x)} = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}$.

$$\overline{\forall x\ A(x)} = \exists x\ \overline{A(x)},$$
$$\overline{\exists x\ A(x)} = \forall x\ \overline{A(x)},$$
$$\overline{A(x) \cdot B(x)} = \overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\forall x\ \left(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}\right) \Rightarrow \overline{\exists x\ A(x) \forall x\ B(x)} = \\ &= \overline{\forall x\ \left(\overline{A(x)} \vee \overline{B(x)}\right)} \vee \left(\forall x\ \overline{A(x)} \vee \exists x\ \overline{B(x)}\right) = \\ &= \exists x\ \left(A(x) \cdot B(x)\right) \vee \exists x\ \overline{B(x)} \vee \forall x\ \overline{A(x)} = \\ &= \exists x\ \left(A(x) \cdot B(x) \vee \overline{B(x)}\right) \vee \forall x\ \overline{A(x)} = \\ &= \exists x\ \left(A(x) \vee \overline{B(x)}\right) \vee \forall x\ \overline{A(x)} = \\ &= \exists x\ A(x) \vee \exists x\ \overline{B(x)} \vee \overline{\exists x\ A(x)} = 1. \end{aligned}$$

Лабораторная работа №6

I. Доказать, что следующие формулы алгебры логики предикатов являются тавтологиями:

1) $(\forall B(x, y) \Rightarrow \exists x B(x, y)) \Rightarrow \forall x \forall y A(x, y)$;

2) $((\forall x B(x, y) \cdot \forall x(\overline{B(x, y)})) \Rightarrow (\forall x A(x, y) \vee \forall y B(x, y)$;

3) $(\forall x A(x, y) \Rightarrow \exists x A(x, y)) \Rightarrow (\forall x \forall y A(x, y) \vee \exists x \exists y A(x, y))$

4) $((\forall xB(x,y))\vee(\overline{\exists xB(x,y)})\Rightarrow(\forall xA(x)\Leftrightarrow\exists xB(x));$

5) $\overline{(\forall x\exists yB(x,y)}\Leftrightarrow\exists x\forall y\overline{B(x,y)})\vee\exists x\forall yA(x,y);$

6) $(\forall x\forall y\overline{A(x,y)}\Leftrightarrow\overline{\exists x\exists yA(x,y)})\vee(\exists xA(x,y)\Rightarrow\forall xA(x,y));$

7) $(\forall x(A(x)\Rightarrow\overline{B(x)}))\Rightarrow\overline{\exists xA(x)\forall xB(x)};$

8) $(\forall xA(x)\Rightarrow\exists xB(x))\Leftrightarrow(\exists x\overline{A(x)}\vee\exists xB(x));$

9) $(\forall x\forall yA(x,y)\Rightarrow\exists x\exists yA(x,y))\cdot(\forall xA(x,y)\Leftrightarrow\overline{\exists xA(x,y)});$

10) $(\forall xA(x)\Rightarrow\exists yB(y))\vee(\exists xA(x)\vee\forall yB(y));$

II. Доказать равносильность следующих формул алгебры логики предикатов:

1) $(((\forall xA(x)\vee(\forall yB(y))\Rightarrow\exists xA(x))\Rightarrow\forall yB(y)=\forall yB(y)$

2) $((\exists xA(x)\Rightarrow\exists yB(y))\Rightarrow\exists xA(x))\Rightarrow\exists yB(y)=\forall x\overline{A(x)}\vee\exists yB(y)$

3) $\overline{(\exists xA(x)}\Rightarrow\overline{\forall xA(x)})(\exists xB(x)\Rightarrow\forall x\overline{B(x)})=\forall xB(x)$

4) $(\forall xA(x)\Rightarrow\overline{B(x)})\Rightarrow\overline{(\exists xA(x))\cdot\forall xB(x)}=\forall x\overline{A(x)}\Rightarrow\exists x\overline{A(x)}$

5) $(\forall xA(x)\Rightarrow\exists xB(x))\vee(\exists xB(x)\Rightarrow\forall xA(x))=\forall xA(x)\Rightarrow(\exists xB(x)\Rightarrow\forall xA(x))$

6) $\forall xA(x)\Rightarrow(\forall xA(x)\vee\exists xB(x))=\exists xB(x)\Rightarrow(\forall xA(x)\vee\exists xB(x))$

7) $(\forall xA(x)\cdot\exists xB(x))\Rightarrow\forall xA(x)=(\forall xA(x)\cdot\exists xB(x))\Rightarrow\exists xB(x)$

8) $((\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))\Rightarrow\forall xA(x))\Rightarrow\forall xA(x)=\overline{\forall xA(x)}\Rightarrow(\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))$

9) $\overline{\exists xA(x)}\Rightarrow(\exists xA(x)\Rightarrow\forall xA(x))=\forall xB(x)\Rightarrow(\forall xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))$

10) $\exists xA(x)\Rightarrow(\exists xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))=\overline{\exists xA(x)}\Rightarrow(\exists xA(x)\Rightarrow\forall xB(x))$

IV. Пусть P(x), R(x), Q(x), S(x,y) обозначают предикаты « x – простое число, «x – нечетное число», «y – делится на x», определенные на множестве целых чисел Z соответственно. Переведите на русский язык:

1) $\exists x(R(x)S(x,3))$

2) $\exists x(P(x)S(x,2))$

3) $\forall x(Q(x)\Rightarrow\forall y(P(y)\Rightarrow\overline{S(x,y)}))$

4) $\forall x(R(x)\cdot\forall y(S(x,y)\Rightarrow P(y)))$

5) $\forall x(\overline{R(x)} \Rightarrow \overline{S(2,x)})$

6) $\exists x(R(x) \Rightarrow \overline{S(2,x)})$

7) $\forall x(P(x) \Rightarrow \exists y(R(y) \cdot S(x,y)))$

8) $\forall x(Q(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow \overline{S(x,y)}))$

9) $\exists x(R(x) \Rightarrow \forall y(P(y) \Rightarrow S(x,y)))$

10) $\exists x(Q(x) \cdot \forall y(S(x,y) \Rightarrow P(y)))$

V. Выполнимы ли формулы:

1) $(\exists x P(x)) \cdot \overline{Q(y)}$

2) $(\exists x \forall y A(x,y)) \cdot A(x,y)$

3) $\forall x \forall y \forall z(Q(x,y) \vee \overline{Q(y,z)})$

4) $\exists x \forall y(Q(x,x) \cdot \overline{Q(x,y)})$

5) $\exists x \forall y(P(x) \cdot \overline{P(y)})$

6) $\exists x \forall y(Q(x,y) \Rightarrow \forall z R(x,y,z))$

7) $\forall x \forall y(Q(x,y) \Rightarrow R(x,y))$

8) $(\forall y \forall x \forall z R(x,y,z)) \cdot A(x,y)$

9) $\forall y(\forall x Q(x,y) \vee P(y))$

10) $\forall y(\exists x Q(x,y) \Rightarrow \forall x P(x,y))$

VI. Пусть M – множество точек, прямых и плоскостей трехмерного Евклидова пространства. На этом множестве заданы следующие предикаты:

1) P(x) =1 $\Leftrightarrow$ x- точка
2) A(x) =1 $\Leftrightarrow$ x- прямая
3) B(x) =1 $\Leftrightarrow$ x- плоскость
4) Q(x) =1 $\Leftrightarrow$ x- лежит на y

Записать следующие формулы:

1. Через каждые две точки можно провести прямую: если эти точки различны, то такая прямая единственная.
2. Через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость.
3. Определение параллельных прямых.
4. Определение параллельных плоскостей.
5. Аксиому Евклида о параллельных плоскостях.

VII. Являются ли тавтологиями следующие формулы:

1) $\exists x A(x) \Rightarrow \forall x A(x)$

2) $\exists x \forall y Q(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x Q(x, y)$

3) $\forall x \exists y Q(x, y) \Rightarrow \exists y \forall x Q(x, y)$

4) $\overline{\exists x A(x)} \Rightarrow \overline{\forall x A(x)}$

5) $\exists x(A(x)(C \Rightarrow B(x))) \Rightarrow (\forall x(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}) \Rightarrow \overline{C})$

6) $\forall x(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}) \Rightarrow \overline{\exists x A(x) \forall x B(x)}$

7) $\forall x(A(x) \Rightarrow \overline{B(x)}) \Rightarrow \overline{\forall x A(x) \cdot \exists x B(x)}$

8) $(\exists x A(x) \Rightarrow \forall x B(x)) \Rightarrow \forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$

9) $(C \Rightarrow \forall x A(x)) \Rightarrow \forall x(C \Rightarrow A(x))$

10) $(\exists x A(x) \vee \exists x B(x)) \Rightarrow (\exists x(A(x) \vee B(x)))$

11) $(\forall x A(x)) \cdot B = \forall x(A(x) \cdot B)$

12) $B \cdot (\forall x A(x)) = \forall x(B \cdot A(x))$

13) $B \cdot (\exists x A(x)) = \exists x(B \cdot A(x))$

14) $(\exists x A(x)) \cdot B = \exists x(A(x) \cdot B)$

15) $B \vee (\forall x A(x)) = \forall x(B \vee A(x))$

16) $(\exists x A(x)) \vee B = \exists x(A(x) \vee B)$

17) $(\forall x A(x)) \vee B = \forall x(A(x) \vee B)$

18) $B \vee (\exists x A(x)) = \exists x(B \vee A(x))$

19) $\forall x A(x) \Rightarrow B = \exists x(A(x) \Rightarrow B)$

20) $B \Rightarrow \forall x A(x) = \forall x(B \Rightarrow A(x))$

21) $\exists x A(x) \Rightarrow B = \forall x(A(x) \Rightarrow B)$

22) $B \Rightarrow \exists x A(x) = \exists x(B \Rightarrow A(x))$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение n-местного предиката.

2 Дайте определения тождественно истинного предиката, приведите примеры.

3 Дайте определение тожественно ложного предиката, приведите примеры.

4 Дайте определение выполнимого предиката, приведите примеры.

5 Дайте определение операции применения квантора общности.

6 Дайте определение операции применения квантора существования.

7 Дайте определение формулы логики предикатов.

8 Что называется интерпретации формулы логики предикатов.

9 Какие формулы логики предикатов называются замкнутыми?

10 Какие формулы логики предикатов называются замкнутыми?

11 Какие формулы логики предикатов называются открытыми?

12 Дайте определение выполнимой формулы логики предикатов.

13 Дайте определение тавтологии.

14 Дайте определение противоречия.

15 Что можно сказать о проблеме разрешимости в алгебре логики предикатов?

16 Какие формулы алгебры логики предикатов называются равносильными?

17 Сформулируйте законы де-Моргана для кванторов.

18 Сформулируйте законы пронесения кванторов через конъюнкцию.

19 Сформулируйте законы пронесения кванторов через дизъюнкцию.

20 Сформулируйте законы пронесения кванторов через импликацию.

21 Сформулируйте законы коммутативности для кванторов.

Литература

1 Мощенский, В.А. Лекции по математической логике [Текст] : учебное пособие для студентов математических специальностей вузов/ В.А.Мощенский. – Мн.: Изд. Центр БГУ, 1973. – 159 с.

2 Столяр, А.А. Математика [Текст] : учебное пособие для студентов факультетов по подготовке учителей начальных классов педагогических вузов/ А.А.Столяр, М.П.Лельчук. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975. – 272с.

3 Гиндикин, С.Г.Алгебра логики в задачах [Текст] / С.Г.Гиндикин. – М.: Наука, 1972. – 288с.

Тема 7
КОНЕЧНЫЕ АВТОМАТЫ

7.1 Детерминированные функции

7.2 Ограниченно-детерминированные функции

7.3 Канонические уравнения.

7.4 Диаграммы Мура

Основные понятия по теме

Автоматом называют дискретный преобразователь информации, способный принимать различные состояния, переходить под воздействием входных сигналов из одного состояния в другое и выдавать выходные сигналы.

Если множество состояний автомата, а так же множество входных и выходных сигналов конечны, то автомат называют конечным автоматом. Все реальные автоматы являются конечными.

Информацию, поступающую на вход автомата, и преобразующую входную информацию принято кодировать конечной совокупностью символов. Эту совокупность называют алфавитом, отдельные символы, образующие алфавит буквами, а любые конечные упорядоченные последовательности букв данного алфавита словами в этом алфавите.

Автоматы функционируют в дискретные моменты времени, которые обозначаются натуральными числами t=0, 1, 2,…. В каждый момент дискретного времени на вход автомата поступает один сигнал (буква), фиксируется определённое состояние автомата и с выхода снимается один сигнал. Реальные автоматы могут иметь, вообще говоря, несколько входов и выходов. В некоторых случаях для решения задач синтеза удобно заменить такие автоматы автоматами с одним входом и одним выходом. Для этого достаточно закодировать соответствующим образом входные и выходные сигналы исходного алфавита. Если, например, автомат имеет два входа, на каждый из которых подаются сигналы 0 или 1, то все возможные комбинации входных сигналов можно закодировать четырьмя буквами (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

Процесс дискретного преобразования информации автоматами можно описать с помощью детерминированных функций.

Обозначим через E^K={0, 1, …, k-1}, где k – некоторое натуральное число, а через E_K множество всех k-значных последовательностей *a* таких, что *a*={*a*(1), *a*(2),…,*a*(t), …}, где $a(\mathrm{i}) \in E^K$ для всех i=1, 2,… .

Обозначим через P^K множество всех функций y=*f* $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определённых на наборах $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_i \in E_K, i = 1,2,\dots,n$ и принимающие значение из E_K. Функции из P^K преобразуют наборы k-значных последовательностей в k-значные последовательности. В множество P^K включим так же все последовательности из E^K, рассматривая их как функции, зависящие от пустого множества переменных, т. е. как константы.

С помощью векторной записи функции от n переменных из P^K можно свести к функции от одной переменной. Обозначим набор переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через X, вместо y=$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ будем писать y=f(X). При этом значение переменной X есть вектор a=$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ компонентами которого являются последовательности из E_K, $a_i = \{a_i(1), a_i(2), \dots, a_i(t), \dots\}, i = 1,2,\dots,n$. Будем рассматривать a как последовательность векторов

$a_i = \{a_i(1), a_i(2), \dots, a_i(t), \dots\}$, где $a(i) = (a_1(i), a_2(i), \dots, a_n(i)), i = 1,2,\dots$.

Таким образом, мы будем считать, что выполняется тождество:

$$(\{a_1(1), a_1(2), \dots, a_1(t), \dots\}, \{a_2(1), a_2(2), \dots, a_2(t), \dots\}, \dots, \{a_n(1), a_n(2), \dots, a_n(t), \dots\}) =$$
$$\{(a_1(1), a_2(1), \dots, a_n(1)), (a_1(2), a_2(2), \dots, a_n(2)), \dots, (a_1(t), a_2(t), \dots, a_n(t)), \dots\}.$$

Лемма 1 Число наборов $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0,1,\dots,k-1\}, i = 1,2,\dots,n$ равно k^n.

Итак, функцию y=$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in P^K$ с помощью векторной записи можно свести к функции y=$f(X) \in P^N$, где N=k^n. Таким образом, изучение функции y=$f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ из P^K можно свести к изучению функции от одной переменной из P^N, где N=k^n.

Определение 1 Функция y=$f(X)$ из P^N называется детерминированной, если каково бы ни было число t и каковы бы ни были последовательности a и b такие, что *a(1)=b(1), a(2)=b(2), ... a(t)=b(t)* значение функций *α, β, где α=*$f(a)$, β=$f(b)$ представляют собой последовательности, у которых тоже совпадают первые t членов, т. е.

α(1)=β(1), α(2)=β(2), …, α(t)=β(t).

Множество всех детерминированных функций обозначим через P_g^K.

Из определения детерминированной функции следует, что значение α*(t)* (α=$f(a)$) зависит только от значения первых t членов входной последовательности а, т. е. *a(1), a(2), ..., a(t),* следовательно *α(t)=φ(a(1), a(2), ..., a(t)).*

Приведём примеры как детерминированных, так и недетерминированных функций.

Пример 1 Рассмотрим функцию y=$f(x) \in P^2$, определённую следующим образом $$f(a) = \begin{cases} (0,0\ldots), если \quad a = (0,0,\ldots) \\ (1,1,\ldots), если \quad a \neq (0,0,\ldots) \end{cases}$$

Покажем, что данная функция недетерминированная. Действительно, возьмём две входные последовательности $a_1 = (0,0,0,\ldots)$ и $a_2 = (0,0,1,\ldots)$. Тогда $f(a_1) = (0,0,0,\ldots)$ и $f(a_2) = (1,1,1,\ldots)$. Следовательно, данная функция недетерминированная.

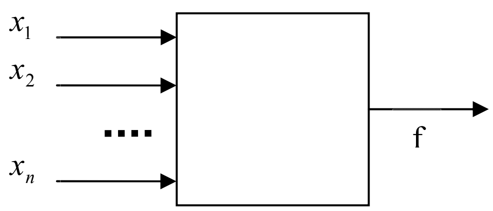
Пример 2 Рассмотрим функцию $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$ из P^2, определённую следующим образом $f(x_1, x_2) = \{x_1(1) \cdot x_2(1), x_1(2) \cdot x_2(2), \ldots, x_1(t) \cdot x_2(t), \ldots\}$.Здесь выходная последовательность – почленная конъюнкция входных последовательностей. Очевидно, что $f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \in P_g^{\ 2}$.

Пример 3 Рассмотрим функцию z=x+y$\in P^2$ осуществляющую сложение 2-значных последовательностей в двоичной системе с бесконечным числом разрядов. Для этого используется обычный алгоритм сложения двух чисел столбиком

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \ldots x(3), x(2), x(1) \\ \ldots y(3), y(2), y(1) \end{array} \\ \hline \ldots z(3), z(2), z(1). \end{array}$$

Очевидно, что *z(t)* определяется по первым *t* слагаемых, т. е. x+y$\in P_g^{\ 2}$.

Детерминированная функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ может быть проинтерпретирована следующим образом. Пусть мы имеем некоторый «дискретный преобразователь», в котором существует *n* входов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и один выход f.

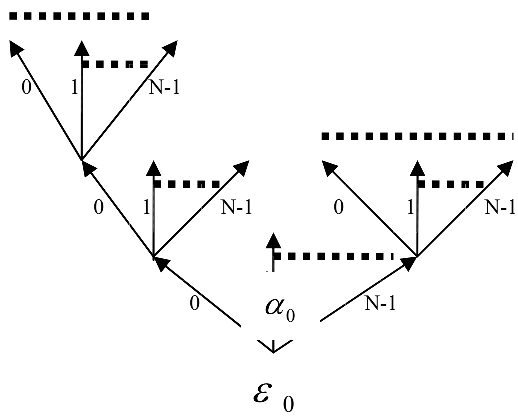


На входы в моменты времени *t=1,2,…,m*, … подаются входные последовательности

$$\begin{aligned} a_1 &= \{a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(t), \ldots\} \\ a_2 &= \{a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(t), \ldots\} \\ &\ldots \\ a_n &= \{a_n(1), a_n(2), \ldots, a_n(t), \ldots\}. \end{aligned}$$

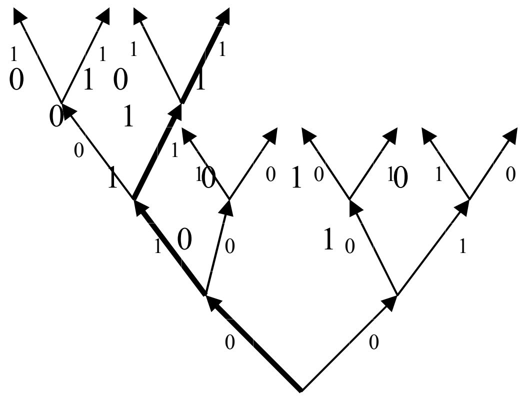
И в эти же моменты *t* на выходе возникает выходная последовательность $\alpha = \{\alpha(1), \alpha(2), \ldots, \alpha(t), \ldots\}$, причем $\alpha = f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Очевидно, что в дискретном преобразователе значения *α(t)* зависит только от значений входных последовательностей в момент времени *1,2,…,t* и не зависит от значений в будущие моменты времени. Поэтому преобразование f есть детерминированная функция.

Пусть $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_D{}^K$. Выше мы показали, что с помощью векторной записи данную функцию можно свести к функции $y = f(X) \in P_D^N$, где $N = k^n$. Рассмотрим бесконечную фигуру:



Построена она следующим образом, и называть её будем деревом. Возьмём произвольную вершину α_0, которую назовём корнем дерева. Из неё проведём N рёбер, которые образуют первый ярус. Из концов каждого из рёбер также проведём N рёбер, которые образуют второй ярус и т. д. Рёбра каждого пучка нумеруются слева направо числами 0,1,…,N-1 или их значениями в k-ичной системе счисления.

В дальнейшем на рисунках номера рёбер будут опускаться. Далее, каждому ребру в построенном дереве произвольным образом припишем одно из чисел множества {0,1,…,k-1}. В результате получим так называемое нагруженное дерево. Рассмотрим следующее нагруженное дерево.



Начиная движение с корня дерева, пойдём по рёбрам. Так, например, последовательности (0,0,1,1…), где числа 0,0,1,1, … - номера рёбер, соответственно, 1-го,2-го,3-го,4-го и т. д. ярусов соответствует выделенный маршрут и последовательность (0,1,1,1…).

Теорема 1 *Функция из* P^k *будет детерминированной тогда и только тогда, когда она может быть заданна с помощью нагруженного дерева.*

Доказательство Покажем, что любое нагруженное дерево задает некоторую детерминированную функцию. Действительно, пусть $\{a(1), a(2), \dots, a(t), \dots\}$ – произвольная последовательность чисел, где $a(i) \in E^K$, i=1,2,…. Будем считать, что $a(1)$ - номер ребра 1-го яруса, $a(2)$ - номер ребра 2-го яруса и т. д. Данной последовательности в нагруженном дереве соответствует единственный маршрут, ведущий из корня дерева. Числа, приписанные выделенным ребрам образуют выходную последовательность $\{b(1), b(2), \ldots, b(t), \ldots\}$. Покажем, что построенная функция из P^K является детерминированной. Пусть $\{a_1(1), a_1(2), \ldots, a_1(t), \ldots\}$ и $\{a_2(1), a_2(2), \ldots, a_2(t), \ldots\}$ – две входные последовательности такие, что

$a_1(1) = a_2(1), a_1(2) = a_2(2), \ldots, a_1(t) = a_2(t)$. Ясно, что маршруты в нагруженном дереве, соответствующие данным последовательностям на первых t ярусах совпадают. А это значит, что $b_1(1) = b_2(1), b_1(2) = b_2(2), \ldots, b_1(t) = b_2(t)$, т. е. функция детерминированная. Обратное утверждение очевидно. Теорема доказана.

Рассмотрим следующие примеры:

Пример 4 $f(x) = \overline{x} \in P^2$. Ясно, что $f(x) = \overline{x} \in P_D^2$ и число ребер, выходящих из вершин равно $N = 2^1$. Построим дерево соответствующее данной функции.

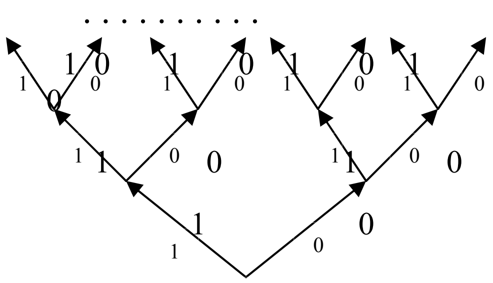


Рис. 1

Например, входной последовательности {0,1,1,…} будет соответствовать входная последовательность {1,0,0,…}.

Пример 5 $f(x, y) = x \cdot y \in P_D^2$, которая задаётся следующим образом.

$f(x, y) = \{x(1) \cdot y(1), x(2) \cdot y(2), \ldots, x(t) \cdot y(t), \ldots\}$, где $x(t) \cdot y(t)$ – конъюнкция.

Для данной функции k=n=2 и число ребер, выходящих из вершин равно N=2^2=4. Ребру с номером D=(0,0) соответствует значение (0,0)=0

1=(0,1) $0 \cdot 1 = 0$

2=(1,0) $1 \cdot 0 = 0$

3=(1,1) $1 \cdot 1 = 1$.

Следовательно, данной функции соответствует следующее нагруженное дерево.

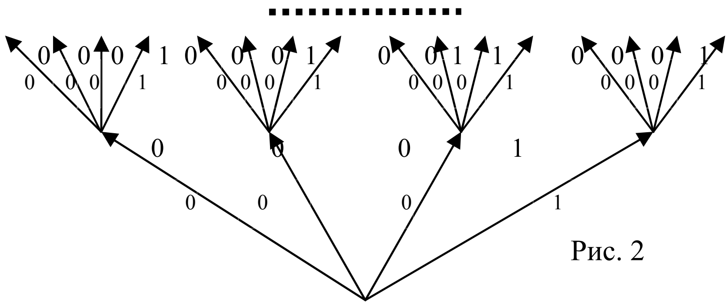


Рис. 2

Пример 6 $f(z) = x + y \in P_D^2$, k=n=1, N=1²=1.

$$z(t) = \begin{cases} x(t) = y(t) \pmod 2 & \textit{при отсутствии переноса} \\ x(t) + y(t) + 1 \pmod 2 & \textit{при наличии переноса} \end{cases}$$

Дерево, соответствующее данной функции строится следующим образом. Процесс приписывания ребрам чисел начинается с 1-го яруса

0=(0,0)	0+0=0
1=(0,1)	0+1=1
2=(1,0)	1+0=1
3=(1,1)	1+1=0

При этом, если появляется перенос в следующий разряд, то конец соответствующего ребра кончается кружочком. Это позволяет выполнить вычисление в следующем ярусе.

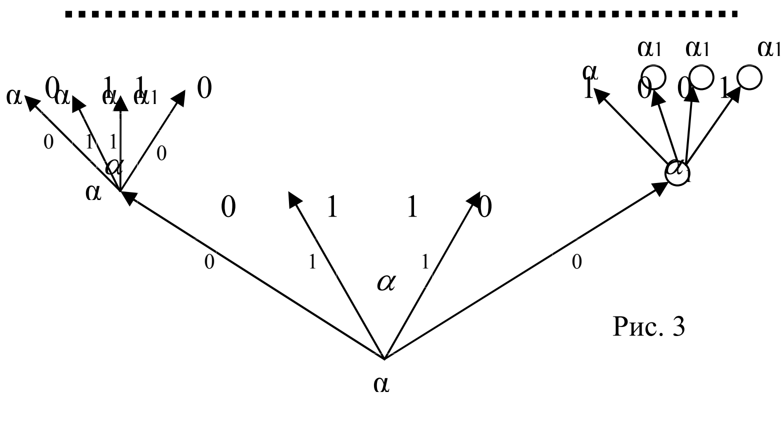


Рис. 3

Возьмем нагруженное дерево для некоторой детерминированной функции $f(X) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Пусть α - произвольная его вершина n-го яруса. Данную вершину можно рассматривать как корень нагруженного дерева. Согласно теореме 1 оно определяет некоторую детерминированную функцию $f^{\alpha}(X)$.

Определение 2 Два поддерева с корнями α_1 и α_2 исходного дерева называются эквивалентными, если $f^{\alpha 1}(X) = f(X)^{\alpha 2}$.

Очевидно, что при естественном наложении двух эквивалентных поддеревьев их нумерации совпадают. Так, в дереве Рис.1 и Рис.2 все поддеревья эквивалентны, а в дереве (Рис.3) поддеревья с корнями α эквивалентны, а с корнями α и α_1 не эквивалентны.

Определение 3 Весом дерева и весом соответствующей детерминированной функции называется максимальное число попарно неэквивалентных поддеревьев.

Например, все функции из примеров 4,5 равен 1, а из примера 6 равен 2.

Определение 4 Детерминированная функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ограниченно – детерминированной функцией, если она имеет конечный вес.

Класс всех ограниченно – детерминированных функций обозначим через $P^K_{O.D.}$

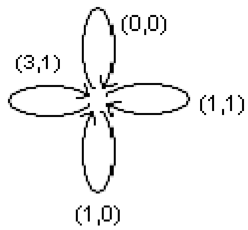
Функции из примеров 4,5,6 являются ограниченно-детерминирован ными функциями.

Рассмотрим следующую детерминированную функцию.

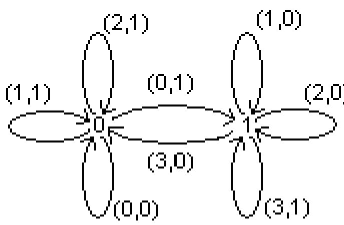
Пример 7 $f(x) = \{0,1,0,0,1,0,0,0,1,0,0,0,0,1\ldots\} \in P^2_D$. Ясно, что вес данной функции $r = \infty$, т. е. она не является ограниченно-детерминированной.

Пусть $f(X) \in P^K_{O.D.}$, вес которой равен r. Рассмотрим алфавит $Q = \{q(0), q(1), \ldots, q(r-1)\}$, который назовём внутренним алфавитом. Каждой вершине нагруженного дерева, соответствующей функции $f(X)$ припишем одну из букв алфавита Q с соблюдением следующего правила: эквивалентным вершинам приписываются одни и те же буквы из Q. В результате получаем так называемое полное нагруженное дерево.

Для любой ограниченно – детерминированной функции соответствующее ей полное нагруженное дерево можно свести к коечному дереву с занумерованными ребрами и вершинами. Если в нем провести отождествление эквивалентных вершин, то получим так называемую диаграмму Мура. В ней нулём отмечена начальная вершина и ребрам приписаны пары чисел (a, b), первое из которых обозначает номер ребра, а второе число соответствующее этому ребру. Так функция $f(x,y) = x \cdot y \in P^2_{O.D.}$ соответствует диаграмме Мура.



А функция $z = x + y \quad \in P^2_{O.D.}$



Пусть $y = f(x)$ - ограниченно-детерминированная функция с весом *r*.

Пусть $x = \{x(1), x(2), \ldots, x(t), \ldots\}$ - входная последовательность. Ей соответствует выходная последовательность $y = \{y(1), y(2), \ldots, y(t), \ldots\}$ и последовательность состояний $q = \{q(1), q(2), \ldots, q(t), \ldots\}$.

Возьмем другую входную последовательность $x' = \{x'(1), x'(2), \ldots, x'(t), \ldots\}$. Ей соответствуют, соответственно, выходная последовательность и последовательность состояний

$$y' = \{y'(1), y'(2), \ldots, y'(t), \ldots\}$$

$$q' = \{q'(1), q'(2), \ldots, q'(t), \ldots\}.$$

В общем случае из того, что $x(t) = x'(t)$ не следует, что $y(t) = y'(t)$. Однако, если $x(t) = x'(t)$ и $q(t-1) = q'(t-1)$, то $y(t) = y'(t)$ и $q(t) = q'(t)$. Другими словами это означает, что если два одноименных ребра ($x(t) = x'(t)$) выходят из эквивалентных вершин ($q(t-1) = q'(t-1)$), то они будут нагружены одной и той же буквой ($y(t) = y'(t)$) и входить в эквивалентные вершины ($q(t) = q'(t)$). Это означает, что

$$\begin{cases} y(t) = \Phi(x(t), q(t-1)) \\ q(t) = \Psi(x(t), q(t-1)) \end{cases} \qquad (*)$$

Уравнения (*) называются каноническими уравнениями функции $y = f(x)$. Первое уравнение называется уравнением выход, второе уравнением перехода.

Уравнение (*) можно задать с помощью канонической таблицы.

x(t)	q(t-1)	y(t)	q(t)

Пусть x(t) и y(t) из $\{0,1\}$, а $q(t) \in Q, где\ |Q| = r$. Если вес r≤2, то каноническая таблица есть таблица истинности. Если r>2, то каноническая таблица не является таблицей истинности. Но с помощью кодирования всех чисел алфавита Q в двоичной системе счисления мы её можем преобразовать в таблицу истинности.

Рассмотрим теперь функцию от n переменных $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P^2_{O.D}$ с весом r>1, $Q = \{0,1,2,\ldots,r-1\}$ - внутренний алфавит. Закодируем все числа из алфавита Q в двоичной системе счисления наборами из $\{0,1\}$ длинной $l = [\log_2 r] + 1$. В этом случае канонические уравнения искомой функции имеют вид.

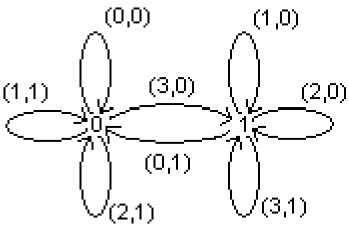
$$
\begin{cases}
y(t) = \Phi(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), q_2(t-1), \ldots, q_l(t-1) \\
q_1(t) = \Psi_1(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), q_2(t-1), \ldots, q_l(t-1) \\
\ldots \\
q_l(t) = \Psi_l(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), q_2(t-1), \ldots, q_l(t-1)
\end{cases} \qquad (**)
$$

В дальнейшем договоримся, что начальные состояния в канонических уравнениях (**) $q(0)=0$, а в уравнениях (*) $q_1(0) = q_2(0) = \ldots = q_l(0) = 0$.

Пример 8 Найти канонические уравнения функции

$z = f(x, y) = x + y \in P^2_{O.D.}$

Ранее мы показали, что вес данных функций равен 2 и её диаграмма Мура



Построим каноническую таблицу.

x(t)	y(t)	q(t-1)	z(t)	q(t)
0	0	0	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	1	0	1
1	1	0	0	1
1	1	1	1	1

Данная каноническая таблица является таблицей истинности.

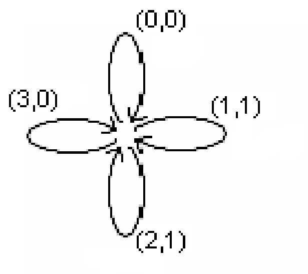
Запишем канонические уравнения, используя результаты раздела 3.

$$
\begin{cases}
z(t) = \overline{x}(t)\overline{y}(t)q(t-1) \vee \overline{x}(t)y(t)\overline{q}(t-1) \vee x(t)\overline{y}(t)q(t-1) \vee x(t)y(t)q(t-1) \\
q(t) = \overline{x}(t)y(t)q(t-1) \vee x(t)\overline{y}(t)q(t-1) \vee x(t)y(t)\overline{q}(t-1) \vee x(t)y(t)q(t-1)
\end{cases}
$$

Используя законы алгебры логики

$$\begin{cases} z(t) = x(t) + y(t) + q(t-1) \\ q(t) = y(t)q(t-1) \vee x(t)q(t-1) \vee x(t)q(t) \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

Пример 9 Найти каноническое уравнение для функции заданной следующей диаграммой Мура



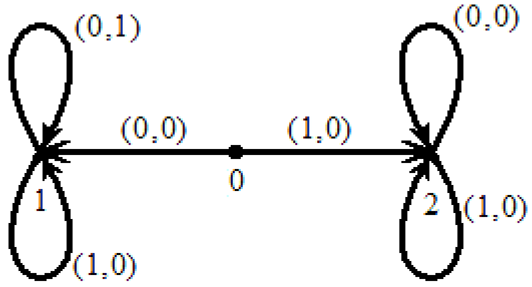
Строим каноническую таблицу.

x(t)	y(t)	q(t-1)	z(t)	q(t)
0	0	0	0	0
0	1	0	1	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0

Отсюда $\begin{cases} z(t) = x(t) + y(t) \\ q(0) = 0 \end{cases}$

Заметим, что если вес функции равен 1, то в канонических уравнениях $q(t-1)$ будет отсутствовать.

Пример 10 Найти канонические уравнения ограниченно-детерминированной функции заданной следующей диаграммой Мура**:**



Ясно, что вес данной функции равен 3. Построим каноническую таблицу для данной функции:

x(t)	q(t-1)	y(t)	q(t)
0	0	0	1
0	1	1	1
0	2	0	2
1	0	0	2
1	1	0	1
1	2	0	2

Данная таблица не является таблицей истинности. Преобразуем данную таблицу в таблицу истинности. Для этого значения второго и четвёртого столбца закодируем в двоичной системе счисления:

<table>
<tr><th>x(t)</th><th>$q_1(t-1)$</th><th>$q_2(t-1)$</th><th>y(t)</th><th>$q_1(t)$</th><th>$q_2(t)$</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="3">Не определена</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr>
<tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td colspan="3">Не определена</td></tr>
</table>

Доопределим данную функцию следующим образом:

x(t)	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	y(t)	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	1
0	1	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Составим канонические уравнения используя аппарат булевой алгебры:

$$\text{y(t)}=\overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)}\ q_2(t-1)\vee\overline{x(t)}\ q_1(t-1)q_2(t-1)\vee x(t)q_1(t-1)q_2(t-1)=$$
$$=\overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)}q_2(t-1)\vee q_1(t-1)q_2(t-1)(\overline{x(t)}\vee x(t))=$$
$$=\overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)}q_2(t-1)\vee \vee q_1(t-1)q_2(t-1) =q_2(t-1)(\overline{x(t)}\ \overline{q_1(t-1)}\vee q_1(t-1))$$

$$q_1(t) = (x(t) \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1))(x(t) \vee q_1(t) \vee \overline{q_2(t-1)}) \cdot$$
$$\cdot (\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee \overline{q_2(t-1)}) = (x(t) \vee q_1(t-1))(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee \overline{q_2(t-1)}) =$$
$$q_1(t-1) \vee x(t)(\overline{x(t)} \vee \overline{q_2(t-1)}) = q_1(t-1) \vee x(t)\overline{q_2(t-1)}$$
$$q(t) = (x(t) \vee \overline{q_1(t-1)} \vee q_2(t-1))(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1))(\overline{x(t)} \vee$$
$$\vee \overline{q_1(t-1)} \vee q_2(t-1)) = (\overline{q_1(t-1)} \vee q_2(t-1))(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1) \vee q_2(t-1)) =$$
$$= q_2(t-1) \vee \overline{q_1(t-1)}(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1)) = q_2(t-1) \vee \overline{q_1(t-1)x(t)}.$$

Итак, искомые канонические уравнения имеют вид:

$$\begin{cases} y(t) = q_2(t-1)(\overline{x(t)} \vee q_1(t-1)) \\ q_1(t) = q_1(t-1) \vee x(t)\overline{q_2(t-1)} \\ q_2(t) = q_2(t-1) \vee \overline{q_1(t-1)}x(t) \\ q_1(0) = q_2(0) = 0 \end{cases}$$

Каждой ограниченно-детерминированной можно сопоставить канонические уравнения. Однако выбор канонических уравнений не однозначен. Эта неоднозначность связана:

1) с различными способами кодирования состояний.

2) с различными способами доопределения функций.

Очевидно, что канонические уравнения позволяют вычислить
по входной последовательности $a=\{a(1),a(2),\ldots,a(\mathrm{t}),\ldots\}$
выходную последовательность $b=\{b(1),b(2),\ldots,b(\mathrm{t}),\ldots\}$.

Итак, для задания конечного автомата фиксируется три конечных множества (алфавита):

– множество возможных входных сигналов $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$

– множество возможных выходных сигналов $y = (y_1, y_2, ..., y_k)$

– множество возможных внутренних состояний автомата $Q = (q_0, q_1, ..., q_r)$.

На этих множествах задаются две детерминированные функции:

– функция переходов Ψ, определяющая состояние автомата $q(t)$ дискретного времени t в зависимости от состояния автомата $q(t\text{-}1)$ и значения входного сигнала в момент времени t: $q(t)= \Psi(x(t),q(t\text{-}1))$

– функция выходов *Ф*, определяющая зависимость выходного сигнала автомата *y(t)* от состояния автомата *q(t-1)* и входного сигнала *x(t)* в момент времени *t: y(t)=Ф(x(t),q(t-1))*.

Кроме того, на множестве состояний автомата фиксируется одно из внутренних состояний *q(0)* в качестве начального состояния.

Лабораторная работа №7

I. Являются ли детерминированными функциями следующие функции:

1. f(x(1)x(2)…x(t)…)=x(2)x(3)…
2. f(x(1)x(2)…x(t)…)=x(1)x(2)x(1)x(2)x(3)…
3. f(x(1)x(2)…x(t)…)=1010010001…01 $\underbrace{0...0}_{n\_раз}$ 10
4. f(x(1)x(2)…x(t)…)=0101101110…1 $\underbrace{0...0}_{n\_раз}$ 1…
5. f(x(1)x(2)…x(t)…)=x(1)x(1)x(2)x(2)x(3)x(3)…

II. Выяснить, является ли следующая ограниченно-детерминированной и найти её вес:

1. $\begin{cases} y(1)=1 \\ y(t)=x(t-1), t\geq 2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y(1)=y(2)=1 \\ y(t)=x(t-2), t\geq 3 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y(1)=1 \\ y(t)=\overline{y(t-1)}, t\geq 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \qquad y(1)=0 \\ y(t)=\overline{y(t)-1}, \quad t\geq 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \qquad y(1)=0 \\ y(t)=\overline{x(t-1)} \quad t\geq 0 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(t) = x(t) + x(t-1) \end{cases}$

7. $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(t) = x(t) \vee x(t-1) \end{cases}$

8. $\begin{cases} y(2t) = x(t+1) & t \geq 1 \\ y(2t-1) = x(t) & t \geq 1 \end{cases}$

9. $\begin{cases} y(2t) = \overline{x(t+1)} & t \geq 1 \\ y(2t-1) = x(t) & t \geq 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(t) = x(t) + y(t-1) & t \geq 2 \end{cases}$

III. Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для следующих функций.

1. $\begin{cases} y(2t-1) = x(2t-1) & t \geq 1 \\ y(2t) = x(2t) + y(2t-1) & t \geq 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(t) = x(t-1) + x(t) & t \geq 2 \end{cases}$

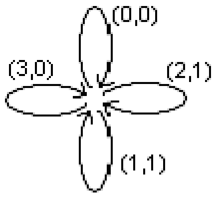
3. $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(t) = x(t-1) & t \geq 2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} y(1) = 0 \\ y(t) = \overline{x(t-1)} \end{cases}$

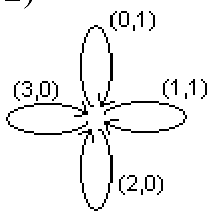
5. $\begin{cases} y(1) = 1 \\ y(t) = \overline{x(t)} & t \geq 1 \end{cases}$

IV. Найти канонические уравнения для следующих функций:

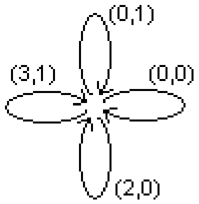
1)



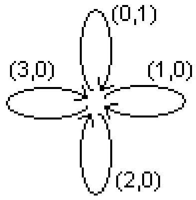
2)



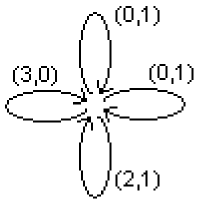
3)



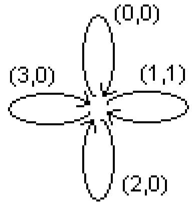
4)



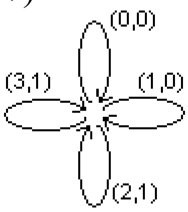
5)



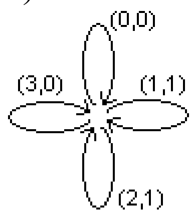
6)



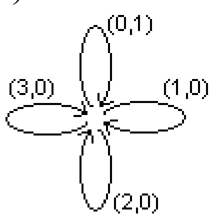
7)



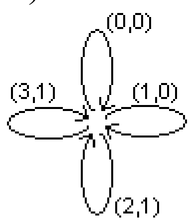
8)



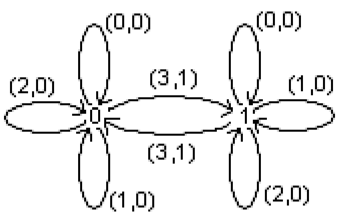
9)



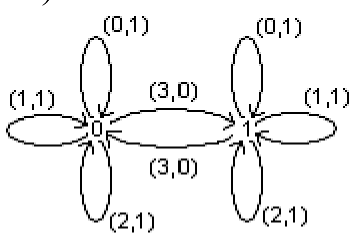
10)



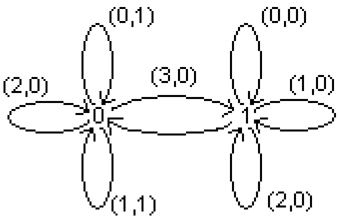
11)



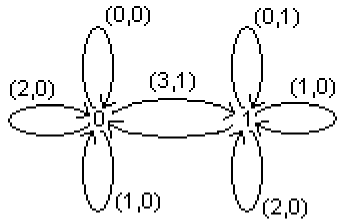
12)



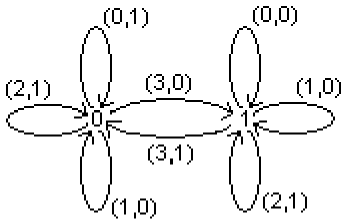
13)



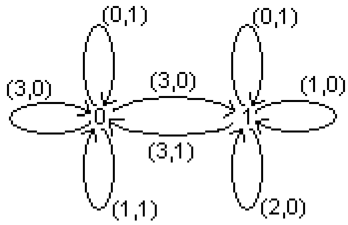
14)



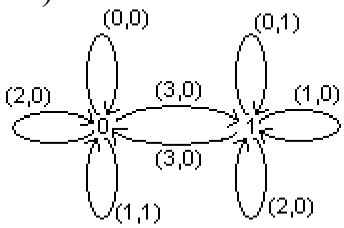
15)



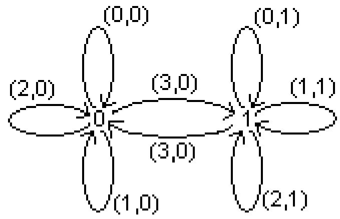
16)



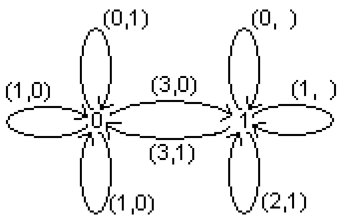
17)



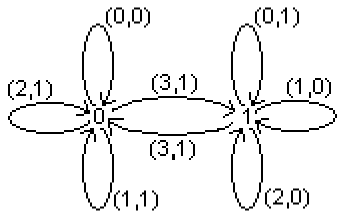
18)



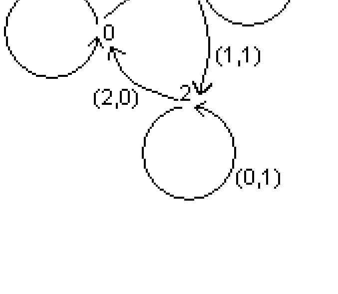
19)



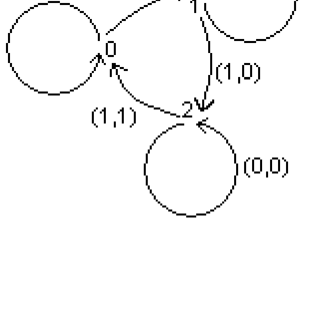
20)



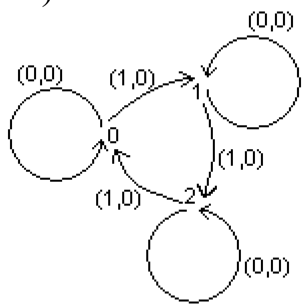
21)



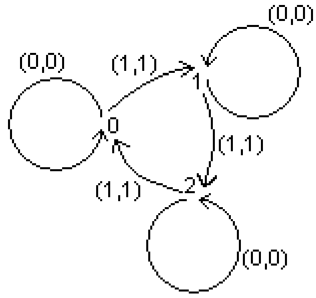
22)



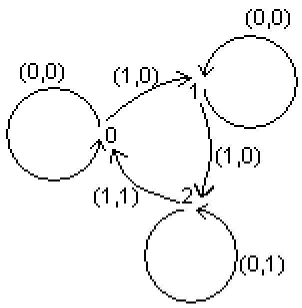
23)



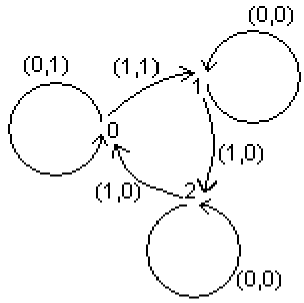
24)



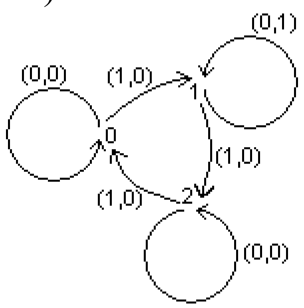
25)



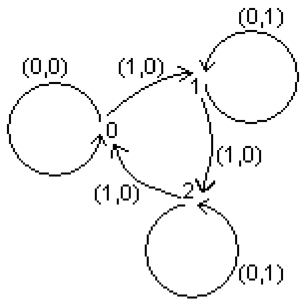
26)



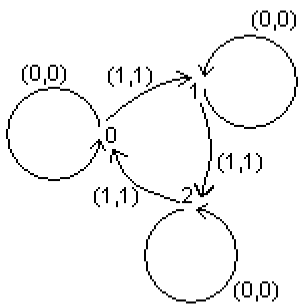
27)



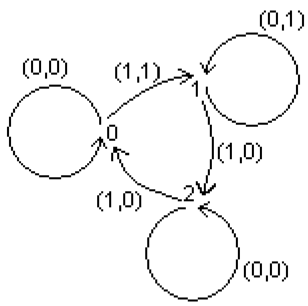
28)



29)



30)



Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение детерминированной функции.

2 Приведите примеры детерминированных функций.

3 Приведите примеры недетерминированных функций.

4 Приведите графическую интерпретацию детерминированных функций.

5 Что такое бесконечное нагруженное дерево?

6 Что такое вес бесконечно нагруженного дерева?

7 Какие функции называются ограниченно детерминированными?

8 Приведите примеры ограниченно детерминированных функций.

9 Приведите примеры неограниченно детерминированных функций.

10 Что такое диаграмма Мура?

11 Дайте определение канонических уравнений ограниченно детерминированных функций.

Литература

1 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

Тема 8
РЕКУРРЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

8.1 Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

8.2 Частично-рекурсивные функции

Основные понятия по теме

В дальнейшем под множеством натуральных чисел N будем понимать множество $N=\{0,1,2,\ldots,k,\ldots\}$

Пусть $y= f(x_1, x_2,\ldots, x_n)$ – функция от n переменных. Обозначим $D(y)$ –

область определения функции $y= f(x_1, x_2,..., x_n)$ $E(y)$ – область значений функции $y= f(x_1, x_2,..., x_n)$

Функция $y=f(x_1, x_2,..., x_n)$ называется числовой функцией, если:

1) $D(y)=N \times\cdot N \cdot\times ... \times\cdot N = N^n$;

2) $E(y) \subseteq N$

Функция $y=f(x_1, x_2,..., x_n)$ называется частично числовой функцией, если: 1) $D(y) \subseteq N \times\cdot N\cdot\times ... \times\cdot N = N^n$;

2) $E(y) \subseteq N$.

Следующие числовые функции мы будем называть простейшими:

1) $O(x)=0$ – нуль-функция;

2) $I_m^n(x_1, x_2,..., x_n)=x_m$, $1\leq m\leq n$ – функция повторяющая значение своих аргументов;

3) $S(x)=x+1$ – функция следования.

Определим следующие три операции: суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Операция суперпозиции

Будем говорить, что n – местная функция φ получается из m – местной функции ψ и n – местных функций $f_1,f_2,...,f_m$ с помощью операции суперпозиции, если для всех $x_1,x_2,...,x_n$ справедливо равенство:

$\varphi(x_1,x_2,...,x_n)=\psi(f_1(x_1, x_2,..., x_n),..., f_m(x_1, x_2,..., x_n))$

Операция примитивной рекурсии

Будем говорить, что $(n+1)$ – местная функция f получается из n – местной функции g и $(n+2)$ – местной функции h с помощью операции примитивной рекурсии, если при любых значениях $x_1, x_2,..., x_n$ выполняется равенства:

$f(x_1, x_2,..., x_n, 0)=g(x_1, x_2,..., x_n)$

$f(x_1, x_2,..., x_n, 1)= h(x_1, x_2,..., x_n , 0, f(x_1, x_2,..., x_n, 0))$

- -

$f(x_1, x_2,..., x_n, y+1)=h(x_1, x_2,..., x_n,y,f(x_1, x_2,..., x_n,y))$.

Эти равенства называют схемой примитивной рекурсии. И тот факт, что функция f получается из функций g, h с помощью операции примитивной рекурсии, записывается следующим образом: $f=R(g,h)$.

Определение 1. Функция f называется примитивно рекурсивной функцией, если она получается из простейших функций с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии, взятых конечное число раз в любой последовательности.

Из данного определения следует, что любая примитивно рекурсивная функция является числовой функцией.

Множество всех примитивно рекурсивных функций обозначим через $P_{п.р.}$

Пример 1 Доказать, что функция $f(x,y)= x+y$ примитивно рекурсивна.

Действительно. Справедливы следующие тождества:

$f(x,0)=x+0=x=g(x)$

$f(x,y+1)=x+(y+1)=(x+y)+1 =f(x,y)+1$

Отсюда следует, что $x+y=R(g(x)=x,\ h(x,y,z)=z+1)$. Так как функции g, h – простейшие функции, то $x + y \in P_{п.р.}$

Пример 2 Доказать, что функция $f(x,y)=x\cdot y$ примитивно рекурсивна.

Действительно. Справедливы следующие тождества:

$f(x,0)=x\cdot 0=0=g(x)$

$f(x,y+1)=x(y+1)=xy+x=f(x, y) +x$.

Отсюда следует, что $x+y=R(g(x)=0,\ h(x,y ,z)=z+x)$.

Как следует из примера 1 функция $h(x,y,z)=x+z \in P_{п.р.}$ А это значит, что $xy \in P_{п.р.}$

Рассмотрим функцию $x \dot{-} y=\begin{cases} x-y, если\ x \geq y \\ 0, если\ x < y \end{cases}$

Данную функцию называют усечённой разностью.

Пример 3 Показать, что функция $f(x,y)=x \dot{-} y$ примитивно рекурсивна.

В начале заметим, что функция $x \dot{-} 1$ примитивно рекурсивна. Действительно:

$0 \dot{-} 1 = 0 = g(x)$

$(x+1) \dot{-} 1 = x = h(x,y)$

Следовательно, $x \dot{-} 1 = R(g(x)=0, h(x,y)=x)$. Итак, $x \dot{-} 1 \in P_{п.р.}$

Далее, нетрудно показать, исходя из определения усечённой разности, что эти функции удовлетворяют также равенствам:

$$x \dot{-} 0 = x = g(x)$$

$$x \dot{-} (y+1) = (x \dot{-} y) \dot{-} 1 = h(x,y,x \dot{-} y)$$

для любых x и y. Данные тождества показывают, что

$$x \dot{-} y = R(g(x)=0,\ h(x,y,z)=z \dot{-} \alpha).$$

Так как функция $h(x,y,z)=z \dot{-} \alpha \in P_{п.р.}$, то $x \dot{-} y \in P_{п.р.}$

Так как любая примитивно рекурсивная функция является числовой функцией, то, очевидно, что $x - y \notin P_{п.р.}$

Пример 4 Покажем, что $|x-y|$ – примитивно рекурсивная функция.

Действительно. Нетрудно показать, что $|x-y| = (x \dot{-} y) + (y \dot{-} x)$. Теперь полученный результат следует из примера 1 и примера 3.

Операция минимизации. Будем говорить, что n-местная функция $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ полученная из (n+1)-местной функции $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)$ с помощью операции минимизации или оператора наименьшего числа, если для любых $x_1,x_2,\ldots,x_n,y$ равенство $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=y$ выполняется тогда и только тогда, когда:

1) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)$ определено и $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,t)>0$ для любых $0 \le t < y$;

2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0$.

Если какое-либо из условий 1), 2) будет невыполнено, то функция $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ не определена при наборе $x_1,x_2,\ldots,x_n$. Короче говоря, величина $g(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ равна наименьшему значению аргумента y, при котором выполняется последнее равенство.

Используется следующее обозначение: $g(x_1,x_2,\ldots,x_n) = M_y[f(x_1,x_2,\ldots,x_n,y)=0]$.

Про функцию g говорят, что она получена из функции f при помощи операции минимизации.

Определение 2 Функция f называется частично рекурсивной функцией, если она может быть получена из простейших функций с помощью операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации, взятых конечное число раз в любой последовательности.

Класс частично рекурсивных функций обозначим $P_{\text{чр}}$.

Обозначим через $P_{\text{р}}$ - класс рекурсивных функций, т.е. всех числовых функций из $P_{\text{чр}}$.

Пример 5 Доказать, что частично числовая функция $g(x)=\dfrac{x}{2}$ частично рекурсивна.

Вначале заметим, что данная функция получается из функции $f(x,y)=|x-2y|$ с помощью операции минимизации, т.е. $\dfrac{x}{2}= M_y(|x-2y|=0)$.

Согласно примерам 2 и 4 функция $f(x,y)=|x-2y|$ примитивно рекурсивна. А это значит, что $g(x)=\dfrac{x}{2}$ - частично рекурсивная функция.

Данный пример показывает, что класс $P_{\text{чр}}$ существенно шире, чем класс $P_{\text{р}}$. Можно сказать, что и класс $P_{\text{р}}$ существенно шире, чем класс $P_{\text{пр}}$, т.е. $P_{\text{пр}} \subset P_{\text{р}} \subset P_{\text{чр}}$

Лабораторная работа №8

I. Какие функции получаются из g и h с помощью схемы примитивной рекурсии

1. $g(x_1)=x_1$, $h(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_3$
2. $g(x_1)=x_1$, $h(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2$

3. $g(x_1) = 2^{x_1}$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}$

4. $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}$

5. $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_3}$

6. $g(x_1) = 3^{x_1}$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_1}$

7. $g(x_1) = 3^{x_1}$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1^{x_3}$

8. $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_3$

9. $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_2 x_3$

10. $g(x_1) = x_1$, $h(x_1, x_2, x_3) = x_3^{x_2}$

II. Доказать примитивную рекурсивность функции

1. $f(x) = n$

2. $f(x) = x + n$

3. $f(x) = x!$

4. $f(x) = x^2$

5. $f(x) = x!$

6. $f(x) = 2^x$

7. $f(x) = 5^x$

8. $Sgx = \begin{cases} 0, \text{если } x = 0 \\ 1, \text{если } x > 0 \end{cases}$

9. $\overline{Sgx} = \begin{cases} 0, \text{если } x > 0 \\ 1, \text{если } x = 0 \end{cases}$

10. $x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{если x} = 0 \\ x - 1, & \text{если x} \geq \text{y} \end{cases}$

11. $\left[\dfrac{x}{2}\right]$ – целая часть от $\dfrac{\text{x}}{2}$

12. $x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если x} \leq y \\ x - y, & \text{если x} > \text{y} \end{cases}$

13. $f(x,y) = |x - y|$

14. $f(x,y) = \max(x,y)$

15. $f(x,y) = \min(x,y)$

16. $f(x,y) = x \dot{-} y^2$

17. $f(x,y) = x^2 + y^2$

18. $f(x,y) = \left[\dfrac{x}{y}\right] = \begin{cases} x, \text{если } y = 0 \\ \text{целая часть от деления x на y, если } y > 0 \end{cases}$

19. $f(x,y) = rest(x,y) = \begin{cases} x, \text{если } y = 0 \\ \text{остаток от деления x на y, если } y > 0 \end{cases}$

20. $f(x,y) = x + y$ (сумма по модулю 2)

III. Применив операцию минимизации к подходящей примитивно рекурсивной функции, доказать, что функция f является частично рекурсивной.

1. Нигде не определенная функция f, т.е. функция f с пустой областью определения
2. $f(x,y) = x - y$
3. $f(x) = 3 - x$
4. $f(x,y) = x - 2y$
5. $f(x) = \dfrac{x}{3}$
6. $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$
7. $f(x,y) = \dfrac{x}{1-2y}$
8. $f(x,y) = \dfrac{x}{x-y}$
9. $f(x,y) = \dfrac{x}{1-xy}$

10. $f(x,y)=\dfrac{x+1}{y-1}$

Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение операции суперпозиции.

2 Какие функции называются числовыми функциями?

3 Какие функции называются частично-числовыми?

4 Какие функции называются простейшими?

5 Дайте определение операции примитивной рекурсии.

6 Дайте определение операции минимизации.

7 Какие функции называются примитивно-рекурсивными?

8 Какие функции называются частично-рекурсивными?

Литература

1 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст] : учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272 с.

Тема 9
МАШИНА ТЬЮРИНГА

9.1 Определение машины Тьюринга.

9.2 Вычислимые по Тьюрингу функции.

Основные понятия по теме

Понятие алгоритма стихийно формировалось с древнейших времен. Современный человек понимает под алгоритмом четкую систему инструкций о выполнении в определенном порядке некоторых действий для решения всех задач какого-то данного класса.

Многочисленные и разнообразные алгоритмы окружают нас буквально во всех сферах жизни и деятельности.

Большое количество алгоритмов встречаются при изучении математики буквально с первых классов школы. Это, прежде всего, алгоритмы выполнения четырех арифметических действий над различными числами – натуральными, целыми, дробными, комплексными. Примерами известных алгоритмов являются алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя двух натуральных чисел, вычисление определителей различных порядков, вычисление рангов матриц с рациональными элементами, приближенное вычисление корней уравнений и т.д.

В начале XX века у математиков начали возникать подозрения в том, что некоторые массовые задачи, по-видимому, не имеют алгоритмического решения. Для точного доказательства несуществования какого-то объекта необходимо имеет точное математическое определение. Первые работы по уточнению понятия алгоритма и его изучению были выполнены в 1936–1937 гг. А. Тьюрингом, Э. Постом, К. Геделем, А.А. Марковым, А. Черчем. Было выработано несколько определений понятия алгоритма, но впоследствии выяснилось, что все они равносильны между собой, то есть определяют одно и то же понятие.

Машины Тьюринга есть математическая (вообразимая) машина, а не машина физическая. Она есть такой же математический объект, как функция, производная, интеграл и т.д. А так же, как и другие математические понятия, понятие машина Тьюринга отражает объективную реальность, моделирует некие реальные процессы.

Машина Тьюринга состоит из ленты, управляющего устройства и считывающей головки.

Лента разбита на ячейки. Во всякой ячейки в каждый момент времени находится в точности один символ из внешнего алфавита $A=\{a_0, a_1, \ldots a_{n-1}\}$, $n \geq 2$. Некоторый символ алфавита A называется пустым, любая ячейка, содержащая в данный момент пустой символ, называется пустой ячейкой. В дальнейшем в качестве внешнего алфавита будем использовать A={0,1}, где в качестве пустого символа будем использовать 0(нуль). В каждый момент времени лента содержит конечное число ячеек, но в процессе работы машины можно пристраивать новые ячейки в пустом состоянии.

Управляющее устройство в каждый момент времени находит в некотором состоянии q_i, принадлежащее множеству $Q\{q_0,q_1,\dots,q_{r-1}\}$, $r \geq 1$. Множество Q называется внутренним алфавитом. В дальнейшем начальное состояние будем обозначать символом q_1, а заключительное символом q_0.

Считывающая головка перемещается вдоль ленты так, что в каждый момент времени она обозревает ровно одну ячейку ленты. Головка может считывать содержимое обозреваемой ячейки и записывать в нее вместо обозреваемого символа некоторый новый символ из внешнего алфавита.

Работа машины Тьюринга определяется программой. Программа состоит из команд. Каждая команда представляет собой выражение одного из следующего вида:

1. $q_i\, a_j \rightarrow q_k\, a_e$
2. $q_i\, a_j \rightarrow q_k\, a_e\, R$
3. $q_i\, a_j \rightarrow q_k\, a_e\, L$

Команда 1 заключается в том, что содержимое a_j обозреваемой на ленте ячейки стирается, а на его места дописывается символ a_e (который может совпадать с a_j), машина переходит в новое состояние q_k (оно может совпадать с предыдущим состоянием q_i).

Команда 2 работает аналогично команде 1, и дополнительно сдвигает считывающую головку в соседнюю справа ячейку.

Команда 3 работает аналогично команде 1, и дополнительно сдвигает считывающую головку в соседнюю слева ячейку.

Если считывающая головка находится в крайней справа (слева) ячейки ленты и происходит ее сдвиг вправо (влево), то к ленте пристраивается новая ячейка в пустом состоянии.

Машинным словом или конфигурацией называется слово вида

$$ai_1,ai_2,\ldots,q_k ai_t,\ldots,\ ai_k,$$

где $ai_j \in A$, $q_k \in Q$. Символ q_k пишется перед символом обозреваемой ячейки. Причем символ q_k может быть самым левым, но не может быть самым правым.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначение a_i^n обозначает слово $a_i\ a_i\ \ldots a_i = a_i^n$

Например, конфигурация $1^3q_10^21^2$ на ленте выглядит следующим образом:

▼q_1

1	1	1	0	0	1	1

Машина Тьюринга считается заданной, если заданы программа, внешний и внутренний алфавиты, и указано какие из символов обозначают начальное и заключительное состояние.

Если машина Тьюринга выходит на заключительное состояние, то она называется остановившейся.

Пусть машина Тьюринга начинает работать в некоторый (начальный) момент времени. Слово, записанное в этот момент на ленте, называется начальным. Чтобы машина Тьюринга начала работать, необходимо поместить считывающую головку против какой-либо ячейки на ленте и указать, в каком состоянии машина Тьюринга находится в данный момент.

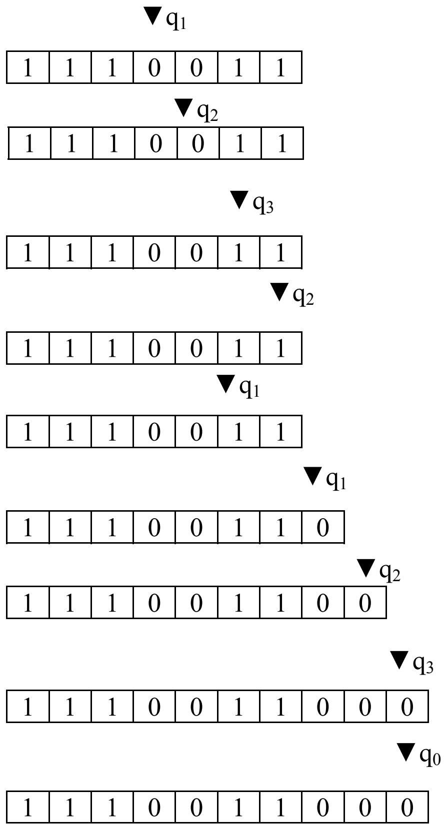
Если P – начальное слово, то машина Тьюринга, начав работу "на слове" P либо остановится через определенное число шагов, либо никогда не остановится. В первом случае говорят, что машина Тьюринга применима к слову P и результатом применения машины к слову P является слово M, соответствующее заключительной конфигурации.

Во втором случае говорят, что машина не применима к слову Р.

Пример 1 Выяснить, применима ли машина Тьюринга, задаваемая следующей программой

$q_1 0 \rightarrow q_2 0\ R$, $q_1 1 \rightarrow q_1 1\ R$, $q_2 0 \rightarrow q_3 0\ R$, $q_2 1 \rightarrow q_1 1\ L$, $q_3 0 \rightarrow q_0 0$, $q_3 1 \rightarrow q_2 1\ R$, к слову $P = q_1\, 1^3 0^2 1^2$.

$q_1 1 \rightarrow q_1 1\ R$	$1^3\, q_1 0^2 1^2$
$q_1 0 \rightarrow q_2 0\ R$	$1^3 0\, q_2 0 1^2$
$q_2 0 \rightarrow q_3 0\ R$	$1^3 0^2\, q_3 1^2$
$q_3 1 \rightarrow q_2 1\ R$	$1^3 0^2 1\, q_2 1$
$q_2 1 \rightarrow q_1 1\ L$	$1^3 0^2\, q_1 1^2$
$q_1 1 \rightarrow q_1 1\ R$	$1^3 0^2 1^2\, q_1 0$
$q_1 0 \rightarrow q_2 0\ R$	$1^3 0^2 1^2\, 0 q_2 0$
$q_2 0 \rightarrow q_3 0\ R$	$1^3 0^2 1^2\, 0^2 q_3 0$
$q_3 0 \rightarrow q_0 0$	$1^3 0^2 1^2\, 0^2 q_0 0$



Следовательно, данная машина Тьюринга применима к слову Р и заключительная конфигурация имеет вид: $1^3 0^2 1^2 0^2 q_0 0$.

В дальнейшем запись $M \underset{T}{\Rightarrow} M_1$, будет означать, что машина Тьюринга (Т) через конечное число циклов перерабатывает машинное слово М в машинное слово M_1.

Функция называется вычислимой по Тьюрингу, если существует машина Тьюринга, вычисляющая её.

Во-первых, напомним, что речь идёт о частично-числовых функциях. Во-вторых, договоримся, что значения $x_1, x_2 \ldots x_n$ аргументов функции $f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ на ленте будут записываться следующим образом:

$0\underbrace{11...1}_{x_1}0\underbrace{11...1}_{x_2}0...0\underbrace{11...1}_{x_n}0$

или $01^{x_1}01^{x_2}0...01^{x_n}0$.

Начинать переработку данного слова будем из стандартного положения, то есть из положения, при котором в состоянии q_1 обозревается крайняя правая единица описанного слова. Если функция $f(x_1, x_2 ... x_n)$ определена на данном наборе значений аргументов, то в результате на ленте должно быть записано подряд $f(x_1, x_2 ... x_n)$ единиц, в противном случае, машина должна работать бесконечно. При выполнении всех перечисленных условий, будем говорить, что машина Тьюринг вычисляет данную функцию f.

Пример 2 Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию O(x)=0. Для этого надо сконструировать машину Тьюринга (T), (т.е. составить программу) которая начинает работу со слова $q_1 01^x$ (x – любое натуральное число) останавливается, когда на ленте нет единиц.$q_1 01^x \Rightarrow q_0 0$

Данная программа имеет вид: $q_1 0 \rightarrow q_2 0R$

$q_2 0 \rightarrow q_0 O$

$q_2 1 \rightarrow q_2 0R$

Пример 3 Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию: $f(x,y)=x+y$. Построим машину Тьюринга (T), которая, начиная работу со слова $q_1 01^x 01^7$, останавливается, когда на ленте $x+y$ единиц

$q_1 01^x 01^7 \Rightarrow q_0 01^{x+y}$

$q_1 0 \rightarrow q_2 0R$	$q21^x 01^y$
$q_2 0 \rightarrow q_0 OR$	$q_0 01^y$
$q_2 1 \rightarrow q_3 1$	$q_3 1^x 01^y$
$q_3 1 \rightarrow q_3 1R$	$1^x q_3 01^y$
$q_3 0 \rightarrow q_4 1$	$1^x q_4 1^{y+1}$
$q_4 1 \rightarrow q_4 1L$	$q_4 01^{x+y+1}$
$q_4 0 \rightarrow q_5 0R$	$q_5 1^{x+y+1}$
$q_5 1 \rightarrow q_0 0$	$q_0 01^{x+y}$

Лабораторная работа №9

I. Выяснить применима ли машина Тьюринга , задаваемой программой:

$q_1 0 \rightarrow q_2 0R$

$q_1 1 \rightarrow q_2 1R$

$q_2 0 \rightarrow q_3 0\ R$

$q_2 1 \rightarrow q_1 1L$

$q_3 0 \rightarrow q_0 0$

$q_3 1 \rightarrow q_2 1R$

К следующим словам:

1) $q_1 1^4 0^2 1^2$
2) $q_1 1^2 0^2 1^3$
3) $q_1 1^2 0^2 1^2$

4) $q_1 101^2$

5) $q_1 1^3 0^3 1$

6) $q_1 10^2 1^2$

7) $q_1 1^3 01^2$

8) $q_1 1^2 0^3 1$

9) $q_1 1^3 0^2 1^3$

10) $q_1 1^2 0^2 1^4$

II. Построить машину Тьюринга, вычисляющую следующую функцию.

1) $f(x) = 0$

2) $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$

3) $f(x) = 2$

4) $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$

5) $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0 \\ 0, & x \geq 2 \\ \text{не определена}, & x \neq 0 \end{cases}$

6) $f(x) = 1 - x$

7) $f(x) = \dfrac{2}{x}$

8) $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$

9) $f(x) = \dfrac{2}{1 - x}$

10) $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$

11) $f(x)=2x$

12) $f(x)=\dfrac{1}{2-x}$

13) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0\\ 2, & x\geq 1\end{cases}$

14) $f(x)=\begin{cases}2, & x=0\\ 0, & x>1\end{cases}$

15) $f(x)=\dfrac{3}{2-x}$

16) $f(x,y)=x+y-1$

17) $f(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$

18) $f(x,y)=x$

19) $f(x,y)=y$

20) $f(x,y)=1-(x+y)$

21) $f(x,y)=\dfrac{1}{1-(x+y)}$

22) $f(x,y)=x+y-2$

23) $f(x,y)=x+1$

24) $f(x,y)=y+1$

25) $f(x,y)=\dfrac{x}{1-y}$

26) $f(x,y)=\dfrac{y}{1-x}$

27) $f(x,y)=y-1$

28) $f(x,y)=x-1$

29) $f(x, y) = \dfrac{2}{x + y}$

30) $f(x, y) = \dfrac{1}{2x + y}$

Вопросы для самоконтроля

1 Что Вы понимаете под машиной Тьюринга?

2 Из каких частей состоит машина Тьюринга?

3 Дайте определение машинного слова.

4 Какая функция называется числовой?

5 Какая функция называется частично-числовой?

6 Дайте определение функции, вычислимой по Тьюрингу.

7 Какие функции называются простейшими?

8 Дайте определение операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

9 Сформулируйте тезис Черча.

10 Сформулируйте тезис Тьюринга.

11 Какая связь между функциями вычислимых по Тьюрингу и частично рекурсивными функциями?

Литература

1 Яблонский, С.В. Введение в дискретную математику [Текст]: учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика»/ С.В.Яблонский. – М.: Наука, 1979. – 272с.

Учебное издание

Семенчук Владимир Николаевич

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

ПРАКТИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

для студентов 1 курса

специальности 1–31 03 03 – «Прикладная математика»

Редактор В.И. Шкредова
Корректор В.Н. Калугина

Лицензия № 02330/0133208 от 30.04.04.
Подписано в печать __________. Формат 60x84 1/16.
Бумага писчая № 1. Гарнитура «Таймс» . Усл. п. л._____.
Уч.-изд.л.______ . Тираж 120 экз. Заказ №__________.

Отпечатано с оригинала-макета на ризографе
учреждения образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»
Лицензия № 02330/0056611 от 16.02.04.
246019, г. Гомель, ул. Советская, 104